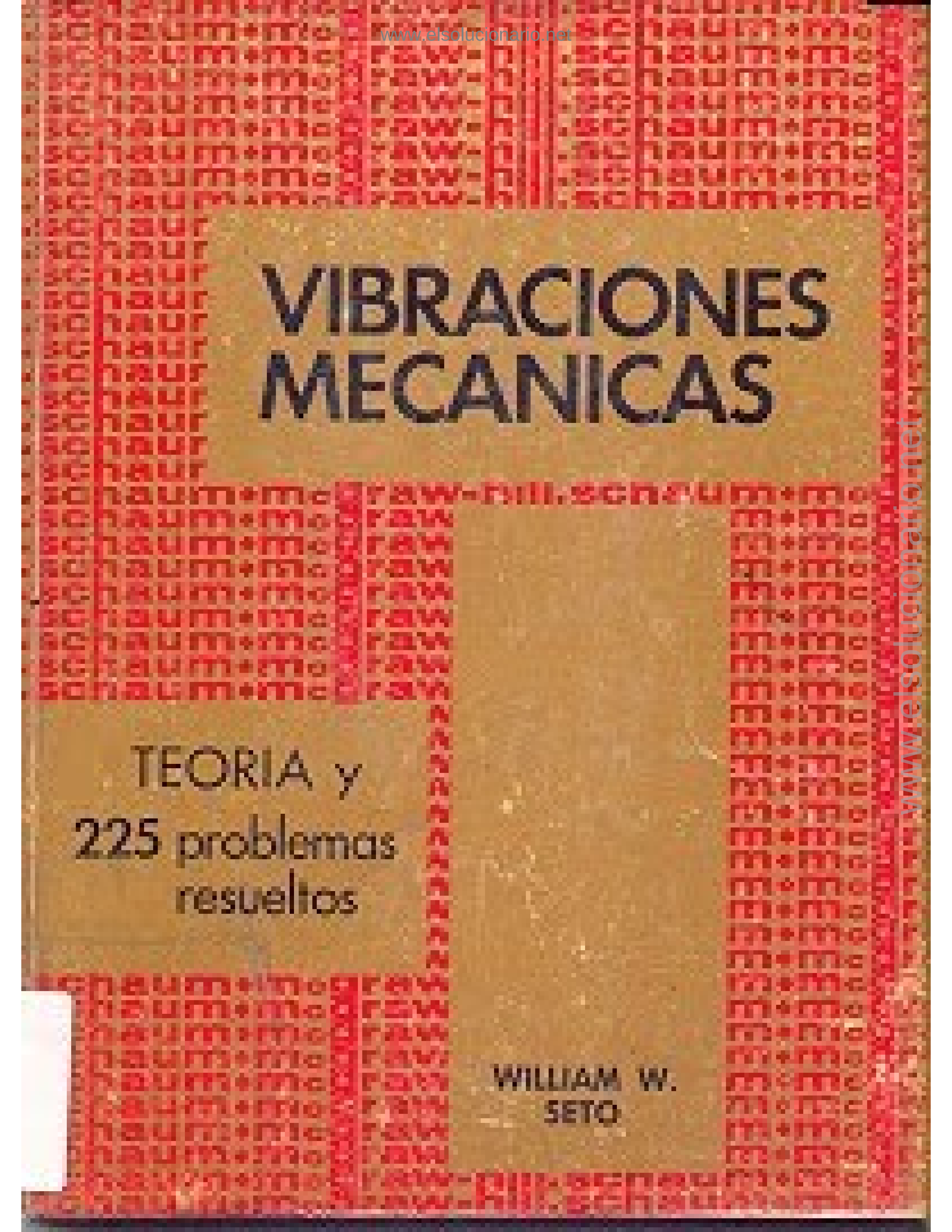

www.elsolucionario.net
VIBRACIONES MECANICAS
TEORIA y
225 problemas resueltos
WILLIAM W. SETO
www.elsolucionario.net

Find your solutions manual here!

Capítulo 1

Sistemas de un solo grado de libertad*

INTRODUCCION

Los sistemas de ingeniería que poseen masa y elasticidad están capacitados para tener movimiento relativo. Si el movimiento de estos sistemas se repite después de un determinado intervalo de tiempo, el movimiento se conoce como *vibración*. La vibración es, en general, una forma de energía disipada y en muchos casos inconveniente. Esto es particularmente cierto en maquinaria; debido a las vibraciones, se producen ruidos, se arruinan las diferentes partes y se trasmiten fuerzas y movimientos indeseables a los objetos muy cercanos.

ECUACION DE MOVIMIENTO

Para eliminar los efectos perjudiciales de la mayor parte de las vibraciones, uno de los medios consiste en hacer un completo estudio de la ecuación de movimiento del sistema en cuestión. Este sistema es primero idealizado y simplificado en términos de *masa, resorte* y *amortiguador*, que representan la masa, la elasticidad y la fricción del sistema, respectivamente. Entonces, *la ecuación de movimiento* expresa el desplazamiento como una función del tiempo o también, la distancia entre cualquier posición instantánea de la masa durante su movimiento y la posición de equilibrio. La propiedad más importante de un sistema vibrante, la frecuencia natural, se obtiene de la ecuación de movimiento.

FRECUENCIA Y PERIODO

En los tipos de análisis de vibraciones *rectilíneo* y *torsional*, el *período* es el tiempo necesario para que un movimiento periódico se repita; la *frecuencia* es el número de ciclos por unidad de tiempo. Debido a las similitudes entre los tipos de vibración rectilíneo y torsional, la discusión y el análisis de un tipo se aplican por igual al otro.

Frecuencia natural es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre sin fricción, mientras que *frecuencia natural amortiguada* es la frecuencia de un sistema que tiene vibración libre con fricción.

VIBRACION LIBRE

Vibración libre es el movimiento periódico que se observa cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio estático. Las fuerzas que actúan son: la fuerza del resorte, la fuerza de fricción y el peso de la masa. Debido a la presencia de la fricción, la vibración disminuirá con el tiempo. Esta es la *vibración libre* llamada a veces *transitoria*.

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_d t + B\,\text{sen}\,\omega_d t)$$

donde
x_c = amplitud de la vibración libre,
ζ = factor de amortiguamiento,
ω_n = frecuencia natural circular,
ω_d = frecuencia natural amortiguada circular,
A, B = constantes arbitrarias.

(Véase el problema 28)

VIBRACION FORZADA

Cuando están actuando fuerzas externas, generalmente de la forma $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ o $F_0 \cos \omega t$, sobre el sistema durante su movimiento vibratorio, la vibración se denomina *vibración forzada*. En una vibración forzada el sistema tenderá a vibrar en su propia frecuencia natural, así como también a seguir la frecuencia de la fuerza de excitación. En presencia de la fricción, aquella parte del movimiento que no se mantiene por la fuerza de excitación sinusoidal desaparecerá gradualmente. Como resultado, el sistema vibrará en la frecuencia de la fuerza de excitación, sin importar las condiciones iniciales ni la frecuencia natural del sistema. La parte de vibración que se mantiene se llama *vibración del estado estacionario* o *respuesta* del sistema. A menudo se requiere la respuesta del estado estacionario en el análisis de vibraciones debido a sus efectos continuos.

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

donde x_p = amplitud de la vibración del estado estacionario,
F_0 = magnitud de la fuerza de excitación,
k = constante de elasticidad,
m = masa del sistema,
c = coeficiente de amortiguamiento,
ω = frecuencia de la fuerza de excitación,
ϕ = ángulo de fase.

(Véase el problema 28)

AMORTIGUAMIENTO

En la realidad, la mayor parte de los sistemas de ingeniería encuentran, durante su movimiento vibratorio, fricción o resistencia en forma de amortiguamiento. La fricción seca de Coulomb, el amortiguamiento magnético, el amortiguamiento interno, la fricción de los fluidos, el amortiguamiento del aire, etc., siempre retardarán el movimiento y causan la desaparición eventual de la oscilación. Si el amortiguamiento es fuerte, el movimiento oscilatorio no ocurrirá; se dice entonces que el sistema es *sobreamortiguado*. Si el amortiguamiento es poco, la oscilación es posible: se dice entonces que el movimiento es *subamortiguado*. Un sistema *críticamente amortiguado* es aquel en el cual la cantidad de amortiguamiento es tal que el movimiento resultante está sobre la línea de límite de los dos casos anteriormente mencionados; es decir, que al poner en libertad la masa, ésta simplemente retornará a su posición de equilibrio estático. En la mayor parte de los problemas de vibraciones el amortiguamiento producido por el aire es tan pequeño que se desprecia, salvo para casos especiales.

RESONANCIA

La *resonancia* ocurre cuando la frecuencia de la excitación es igual a la frecuencia natural del sistema. Cuando esto ocurre, la amplitud de la vibración aumentará indefinidamente y estará gobernada únicamente por la cantidad de amortiguamiento presente en el sistema. Por tanto, la frecuencia natural del sistema debe conocerse y escogerse con cuidado, con el fin de evitar los efectos desastrosos producidos por una amplitud muy grande de vibración en resonancia.

SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD

Muchos sistemas pueden vibrar en más de una manera y dirección. Si un sistema está restringido de modo que sólo puede vibrar de una manera, o si se necesita únicamente una coordenada independiente para determinar por completo la localización geométrica de las masas del sistema en el espacio, este es un sistema de un solo grado de libertad. Los siguientes sistemas son de un solo grado de libertad:

En el sistema masa-resorte mostrado en la figura 1-1, si la masa m está restringida a moverse verticalmente, se necesita una sola coordenada, $x(t)$, para definir la localización de la masa en un instante cualquiera a partir de la posición de equilibrio estático. Se dice entonces que el sistema posee un grado de libertad.

Similarmente, si el péndulo torsional mostrado en la figura 1-2 está restringido a oscilar alrededor del eje longitudinal del árbol, la configuración del sistema puede determinarse por una sola coordenada, $\theta(t)$. Este también es un sistema de un solo grado de libertad.

El sistema masa-resorte-polea de la figura 1-3 es de un solo grado de libertad puesto que, tanto $x(t)$ como $\theta(t)$ pueden usarse para determinar las posiciones relativas de las masas, pero $x(t)$ y $\theta(t)$ no son mutuamente independientes.

Ligando la base al cuerpo cuyo movimiento se va a medir, como se muestra en la figura 1-4, la vibración recogida será útil para medir el movimiento oscilatorio del cuerpo. Esto es posible encontrando el movimiento relativo de la base y la masa. En consecuencia, únicamente se necesita una coordenada para determinar la configuración del sistema.

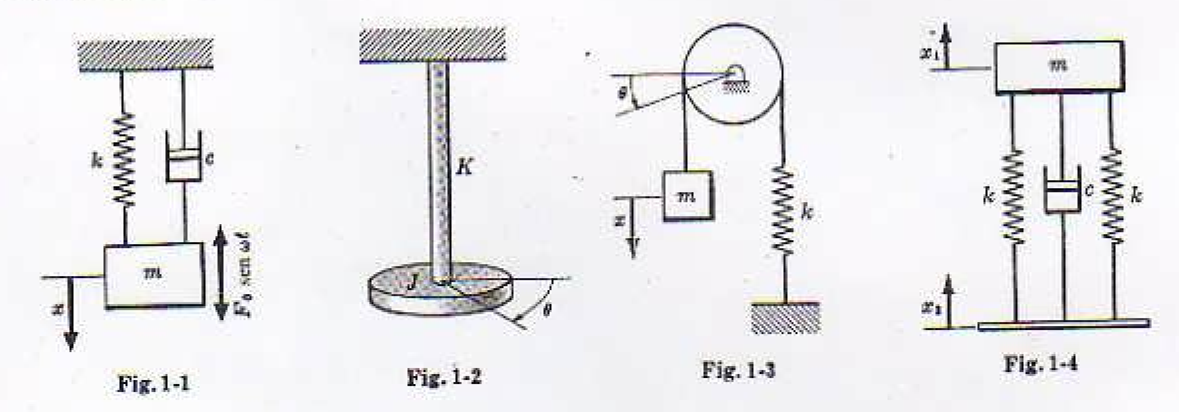


Fig. 1-1 Fig. 1-2 Fig. 1-3 Fig. 1-4

MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

Si una partícula tiene movimiento rectilíneo, su aceleración es siempre proporcional a la distancia a un punto fijo de la trayectoria y está dirigida hacia este punto fijo, entonces se dice que la partícula tiene *movimiento armónico simple* o sencillamente MAS. El MAS es la forma más sencilla de movimiento periódico. El movimiento periódico de vibración, sea simple o complejo, puede considerarse formado por un MAS o un número de MAS de diferentes amplitudes y frecuencias por medio de una serie de Fourier. En forma de ecuación diferencial, el MAS se representa como:

$$a = -Kx \quad \text{o} \quad \ddot{x} + Kx = 0$$

y

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{K}\,t + B \cos \sqrt{K}\,t \quad \text{o} \quad x = C \operatorname{sen}(\sqrt{K}\,t + \phi)$$

LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

La ecuación de movimiento es simplemente otra forma de la ley del movimiento de Newton, $\Sigma F = ma$ (total de fuerzas en la misma dirección del movimiento). Las ecuaciones de movimiento de muchos sistemas se determinan convenientemente por la ley del movimiento de Newton. Sin embargo, algunas de ellas se encuentran más fácilmente por otros métodos, tales como el método de la energía, la ecuación de Lagrange, etc.

METODO DE LA ENERGIA

Para un sistema conservativo, la energía total del sistema es invariable con el tiempo. Si la energía total del sistema se expresa como *energía potencial* y *cinética*, entonces la siguiente igualdad es cierta:

$$\text{E.C.} + \text{E.P.} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0$$

donde E.C. = energía cinética, E.P. = energía potencial.

La ecuación resultante es la ecuación de movimiento del sistema en consideración. Este es, entonces, el método de la energía.

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

METODO DE RAYLEIGH

De nuevo, si el sistema es conservativo, la energía cinética total del sistema es cero en el desplazamiento máximo y es máxima en el punto de equilibrio estático. Para la energía potencial del sistema ocurre lo contrario. Por tanto,

$$(\text{E.C.})_{max} = (\text{E.P.})_{max} = \text{energía total del sistema}$$

Este se conoce como el método de Rayleigh. La ecuación resultante dará fácilmente la frecuencia natural del sistema.

METODO DE LA IMPEDANCIA MECANICA

En la determinación de la vibración del estado estacionario de un sistema, el método de la impedancia mecánica es sencillo y directo comparado con otros métodos. Este método se basa en la representación vectorial de las funciones armónicas. Sea el vector fuerza $\mathbf{F} = Fe^{i\omega t}$. Puesto que la respuesta del estado estacionario debe estar retrasada respecto a la fuerza de excitación, el vector desplazamiento es $x = Xe^{i(\omega t - \phi)}$. El vector velocidad es, entonces, $\dot{x} = Xe^{i(\omega t - \phi + \pi/2)}$ o $\dot{x} = i\omega x$. Similarmente, el vector aceleración es $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Por tanto, las impedancias mecánicas de los tres elementos son:

masa $= -m\omega^2$

amortiguamiento $= ic\omega$

elasticidad $= k$

como se muestra en el diagrama de la figura 1-5.

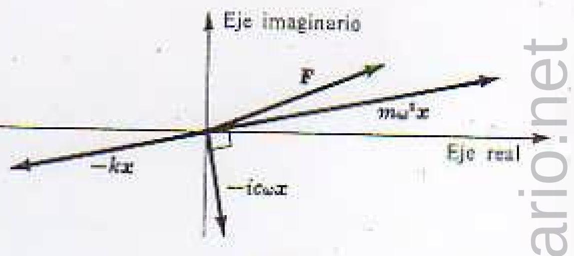


Fig. 1-5

DESBALANCEAMIENTO

Existe *desbalanceamiento rotacional* en una máquina si el centro de gravedad de la parte rotatoria no coincide con el eje de rotación. Generalmente la cantidad de desbalanceamiento rotacional se expresa por me, donde m es una masa excéntrica equivalente y e es la excentricidad. La fuerza centrífuga $me\omega^2$, como resultado de este desbalanceamiento me, producirá una excitación indeseable. Para el *desbalanceamiento alternativo* se aplicará el mismo razonamiento.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$$

(Véase el problema 33)

VELOCIDADES CRITICAS DE UN EJE

Cuando las velocidades de rotación de un eje coinciden con una de las frecuencias naturales del sistema de rotores o discos montados sobre el eje elástico, tendrán lugar violentas vibraciones. Esto se conoce comúnmente como "velocidades críticas" del eje y deben evitarse.

TRASMISIBILIDAD

Con el fin de reducir tanto como sea posible la cantidad de fuerza trasmitida a los cimientos debida a la vibración de la maquinaria, las máquinas están generalmente aisladas de los cimientos, montándolas sobre resortes y amortiguadores. Como resultado, la fuerza trasmitida a los cimientos es la suma de las fuerzas del resorte y del amortiguador, es decir, $F_t = kx + c\dot{x}$. La *trasmisibilidad* se define como la razón de la fuerza trasmitida a la fuerza impresa.

$$\text{TR} = F_t/F_0 = \sqrt{1 + (2\zeta r)^2} \Big/ \sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}$$

donde r = razón de frecuencias, ζ = factor de amortiguamiento. (Véase el problema 40)

ζ ζ ζ ζ ζ ζ

Por la misma razón, frecuentemente se desea aislar un instrumento delicado de los movimientos producidos a su alrededor. La eficacia del aislador será la razón de la amplitud de vibración del cuerpo a la de la parte soportante. Esta relación es la misma lograda por el aislador de fuerzas. En consecuencia, el mismo aislador puede usarse como aislante de fuerzas y como *aislante de movimiento*.

INSTRUMENTOS SISMICOS

En esencia, los instrumentos sísmicos son sistemas vibratorios que constan del soporte o base y la masa, soportada por un resorte. El soporte o base es asegurado al cuerpo cuyo movimiento se va a medir. El movimiento relativo entre la masa y la base, indicado por un cilindro que gira o algún otro artefacto colocado dentro del instrumento, indicará el movimiento del cuerpo. Para medir el desplazamiento de una parte de una máquina se usará un *vibrómetro*, cuya frecuencia natural es baja comparada con la frecuencia de la vibración que se va a medir. Se usa un *acelerómetro* para medir aceleraciones debido a que su frecuencia natural es alta comparada con la de la vibración que se va a medir. Los *sismógrafos*, los instrumentos sísmicos más antiguos, se utilizan para registrar las vibraciones de los terremotos. Los tipos más modernos de instrumentos sísmicos, tales como el *torsiómetro*, se utilizan para registrar vibraciones torsionales.

Problemas resueltos

ECUACION DE MOVIMIENTO Y FRECUENCIA NATURAL

1. Determine la ecuación de movimiento y la frecuencia natural de vibración del sistema masa-resorte mostrado en la figura 1-6.

Aplicando la ley del movimiento de Newton $\Sigma F = ma$:

Para oscilaciones verticales las fuerzas que actúan son la fuerza del resorte $k(\delta_{est} + x)$ y el peso mg de la masa. Por tanto la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} = -k(\delta_{est} + x) + mg$$

donde $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, y δ_{est} es la deflexión estática debida al peso de la masa que actúa sobre el resorte. Entonces, $mg = \delta_{est}\, k$, y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

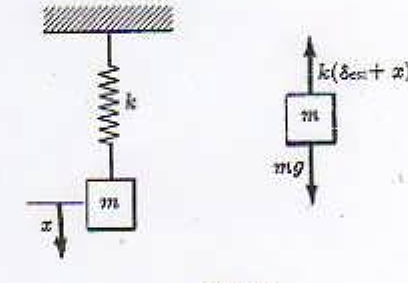


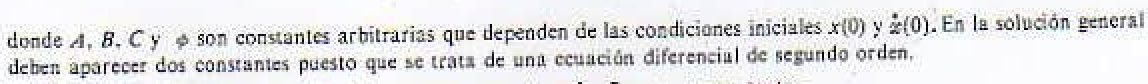
Fig. 1-6

que es la ecuación diferencial del MAS. La solución más general de esta ecuación es:

$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{k/m}\, t + B \cos \sqrt{k/m}\, t$$

o

$$x = C \cos(\sqrt{k/m}\, t + \phi)$$


donde A, B, C y ϕ son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. En la solución general deben aparecer dos constantes puesto que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden.

Para un desplazamiento inicial x_0, tenemos que $A = 0$, $B = x_0$ y por tanto:

$$x = x_0 \cos(\sqrt{k/m}\, t)$$

Físicamente esta ecuación representa una vibración libre sin amortiguamiento, en la cual se produce un ciclo cuando $\sqrt{k/m}\, t$ varía 360 grados; por tanto:

$$\text{período } T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}} \text{ y frecuencia natural } f_n = 1/T \text{ cps}$$

donde $\sqrt{k/m} = \omega_n$ rad/seg es la frecuencia natural angular.

2. Encuentre los resortes equivalentes de los sistemas mostrados en las figuras 1-7(*a*) y 1-7(*b*), donde aquellos se encuentran en paralelo y en serie, respectivamente.

Para resortes en paralelo.

$F_1 = k_1 x, \quad F_2 = k_2 x, \quad$ y $\quad F = F_1 + F_2 = (k_1 + k_2)x$

Entonces, $\quad k_{eq} = F/x = k_1 + k_2$

y en general, $\quad k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$

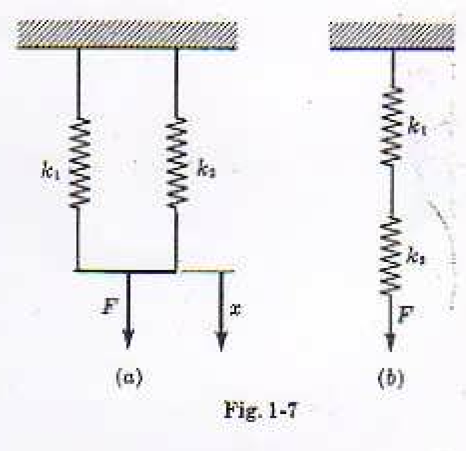


Fig. 1-7

Para resortes en serie, la fuerza es la misma en cada resorte, pero el desplazamiento total es la suma de los desplazamientos individuales. Por tanto:

$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 \quad$ y $\quad x = x_1 + x_2 = F/k_1 + F/k_2$

Entonces, $\quad k_{eq} = F/x = \dfrac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$

y en general, $\quad k_{eq} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} 1/k_i}$

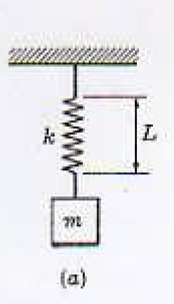
3. Suponiendo que la constante del resorte es inversamente proporcional al número de vueltas del mismo, encuentre y compare las frecuencias naturales de los sistemas mostrados en la figura 1-8.

Para el caso (*a*) la ecuación de movimiento es $m\ddot{x} + kx = 0$, así que $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

Para el caso (*b*), la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

que corresponde a resortes en paralelo, así que $\omega_n = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. Pero, puesto que $k_1 = k_2 = 2k$, entonces, $\omega_n = \sqrt{4k/m}$ y la razón que se pide es 1 : 2.



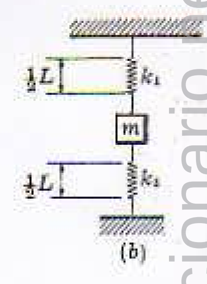


Fig. 1-8

$K = k_1 + k_2$
$K = 2K$

4. Una viga simplemente apoyada con una carga concentrada que actúa en su punto medio, se muestra en la figura 1-9. Si la masa de la viga es despreciable comparada con la masa que actúa, encuentre la frecuencia natural del sistema.

De la resistencia de materiales, la deflexión en el punto medio de una viga simplemente apoyada, debida a la carga concentrada P en el centro de la viga, está dada por $\delta = PL^3/48\,EI$, donde E e I tienen los significados usuales. Para deflexiones pequeñas, $k = P/\delta = 48EI/L^3$; por tanto, la ecuación de movimiento para esta vibración libre sin amortiguamiento es:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

y $\quad \omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{48EI/mL^3}$ rad/seg

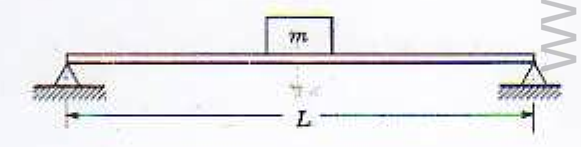


Fig. 1-9

5. La cuerda mostrada está bajo una tensión T, la cual se puede suponer que permanece constante para pequeños desplazamientos. Para oscilaciones pequeñas, encuentre la frecuencia natural de la vibración vertical de la cuerda.

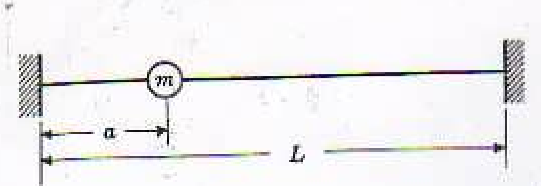


Fig. 1-10

Esta es una vibración libre sin amortiguamiento: la fuerza restauradora es la tensión en la cuerda. Como la tensión es prácticamente constante, esto es $T[x/a + x/(L-a)]$; aplicando la ley del movimiento de Newton, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + T[x/a + x/(L-a)] = 0$$

o

$$m\ddot{x} + T[L/a(L-a)]x = 0, \quad \text{y} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{TL}{ma(L-a)}} \text{ rad/seg}$$

6. Una viga de acero puesta en voladizo tiene una longitud de 10 pulgadas y una sección trasversal cuadrada de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ pul. Una masa de 10 lb se ata al extremo libre de la viga, como se muestra en la figura 1-11. Determine la frecuencia natural del sistema, si la masa se desplaza ligeramente y luego se deja en libertad.



Fig. 1-11

Suponer que la masa de la viga es pequeña. De la resistencia de materiales, la deflexión en el extremo libre de la viga en voladizo debida a la masa m es $\delta = PL^3/3EI$.

Para oscilaciones pequeñas la viga se comporta elásticamente; la constante elástica es $k = F/\delta = 3EI/L^3$ lb/pul. El momento de inercia de la viga es $I = b^3h/12 = (\frac{1}{4})^3(\frac{1}{4})/12 = 1/3072$ pul^4, y el módulo de elasticidad del acero es $E = 30(10)^6$ lb/pul^2.

La ecuación de movimiento para la vibración libre sin amortiguamiento es $m\ddot{x} + kx = 0$, y

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{3(30)(10)^6(32,2)(12)}{10(3072)(10)^3}} = 33,7 \text{ rad/seg}$$

7. Un manómetro utilizado en un laboratorio de mecánica de fluidos tiene una sección trasversal uniforme de área A. Si la columna de líquido de longitud L y densidad ρ se pone en movimiento, como se muestra en la figura 1-12, encuentre la frecuencia del movimiento resultante.

Ley del movimiento de Newton:

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \text{o} \quad -2Axg\rho = LA\rho\ddot{x}$$

de donde $\quad \ddot{x} + (2g/L)x = 0 \quad$ y $\quad \omega_n = \sqrt{2g/L}$ rad/seg

Método de la energía:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}(LA\rho)\dot{x}^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(2Ax\rho g/x)x^2 = Ax^2\rho g$$

y $$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = LA\rho\dot{x}\ddot{x} + 2A\rho gx\dot{x} = 0$$

de donde $\quad \ddot{x} + (2g/L)x = 0 \quad$ y $\quad \omega_n = \sqrt{2g/L}$ rad/seg.

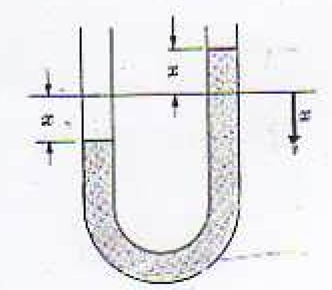


Fig. 1-12

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

8. Un motor eléctrico está soportado por 4 resortes, cada uno de los cuales tiene una constante de elasticidad k lb/pul, como se muestra en la figura 1-13. Si el momento de inercia del motor alrededor del eje central de rotación es J_0, encuentre su frecuencia natural de oscilación.

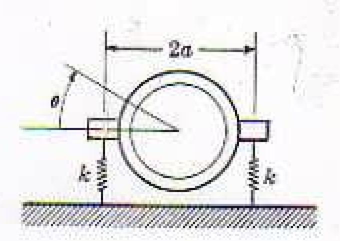


Fig. 1-13

La ley del movimiento de Newton para par es $\Sigma M = J_0 \ddot{\theta}$ o

$$\text{par de torsión} = \text{par restaurador}$$

$$-4ka^2\theta = J_0\ddot{\theta}$$

de donde $\ddot{\theta} + (4ka^2/J_0)\theta = 0$ y $\omega_n = 2a\sqrt{k/J_0}$ rad/seg.

9. Un disco homogéneo semi-circular de radio r y masa m está pivotado en su centro y gira libremente alrededor de éste, como se muestra en la figura 1-14. Determine su frecuencia natural de oscilación para desplazamientos pequeños.

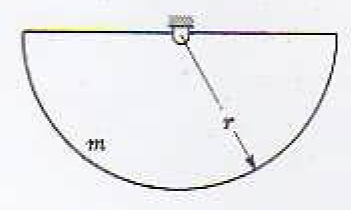
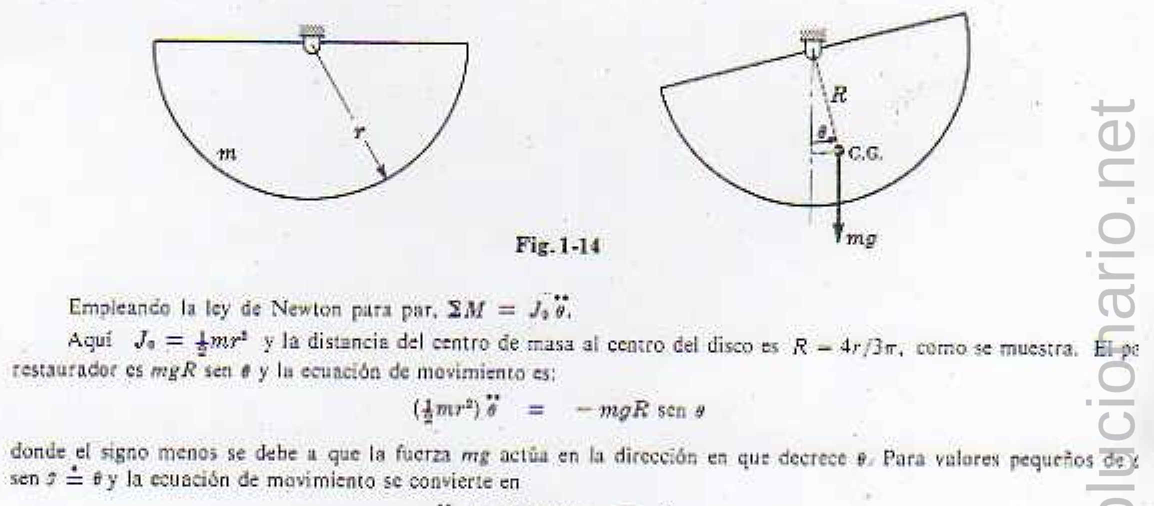



Fig. 1-14

Empleando la ley de Newton para par, $\Sigma M = J_0 \ddot{\theta}$.

Aquí $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$ y la distancia del centro de masa al centro del disco es $R = 4r/3\pi$, como se muestra. El par restaurador es mgR sen θ y la ecuación de movimiento es:

$$(\tfrac{1}{2}mr^2)\ddot{\theta} = -mgR \text{ sen } \theta$$

donde el signo menos se debe a que la fuerza mg actúa en la dirección en que decrece θ. Para valores pequeños de θ, sen $\theta \doteq \theta$ y la ecuación de movimiento se convierte en

$$\ddot{\theta} + (8g/3r\pi)\theta = 0$$

que es la ecuación diferencial de un sistema que tiene movimiento armónico simple. En consecuencia

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8g}{3r\pi}} \text{ rad/seg.}$$

10. Determine la frecuencia natural del sistema masa-resorte-polea mostrado en la figura 1-15.

Ley del movimiento de Newton:

Para la masa m,

$$mg - T = m\ddot{x} \qquad (1)$$

Para la polea M,

$$J_0\ddot{\theta} = Tr - kr^2(\theta + \theta_0) \qquad (2)$$

donde $J_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ es el momento de inercia de la polea.

Pero en equilibrio estático, $mgr = kr^2\theta_0$. Por tanto, la ecuación (2) se convierte en

$$\tfrac{1}{2}Mr^2\ddot{\theta} = r(mg - m\ddot{x}) - kr^2\theta - mgr$$

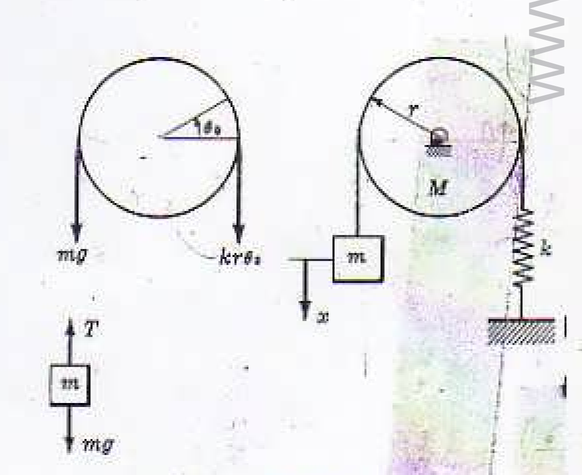


Fig. 1-15

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Remplazando x por $r\theta$ o $\ddot{x}$ por $r\ddot{\theta}$, la ecuación diferencial de movimiento se convierte en:

$$(\tfrac{1}{2}Mr^2 + mr^2)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0, \qquad y \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M/2 + m}} \text{ rad/seg.}$$

Método de la energía:

$$\text{E.C.} = \text{E.C. de la masa} + \text{E.C. de la polea}$$
$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kr^2\theta^2$$

Puesto que la energía total del sistema permanece invariable,

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0 \quad \text{o} \quad mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + J_0\dot{\theta}\ddot{\theta} + kr^2\theta\dot{\theta} = 0$$

y

$$\dot{\theta}(mr^2\ddot{\theta} + J_0\ddot{\theta} + kr^2\theta) = 0$$

Puesto que $\dot{\theta}$ no es siempre igual a cero, $(mr^2\ddot{\theta} + J_0\ddot{\theta} + kr^2\theta)$ es igual a cero. Entonces,

$$\ddot{\theta} - \frac{kr^2}{J_0 + mr^2}\theta = 0 \qquad y \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M/2 + m}} \text{ rad/seg}$$

11. Determine la frecuencia natural del sistema mostrado en la figura 1-16, donde la masa del resorte no es pequeña.

Si la masa del resorte se tiene en cuenta,

$$\text{E.C. del sistema} = \text{E.C. de la masa} + \text{E.C. del resorte}$$
$$= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \int_0^L \tfrac{1}{2}(\rho\, de)[(e/L)\dot{x}]^2$$

donde $(e/L)x$ es el desplazamiento en un punto intermedio del resorte a una distancia e del extremo superior de éste y ρ es la masa del resorte por unidad de longitud.



Fig. 1-16

Método de Rayleigh:

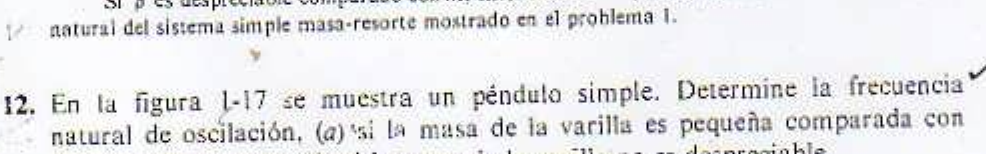
$$(\text{E.C.})_{max} = (\text{E.P.})_{max}$$
$$(\text{E.C.})_{max} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2_{max} + \tfrac{1}{2}\rho(\dot{x}_{max}/L)^2\int_0^L e^2\, de$$
$$= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2_{max} + \tfrac{1}{2}\rho(\dot{x}_{max}/L)^2(L^3/3) = \tfrac{1}{2}(m + \tfrac{1}{3}\rho L)\dot{x}^2_{max}$$
$$(\text{E.P.})_{max} = \tfrac{1}{2}kx^2_{max}$$

Para una oscilación sinusoidal, sea $x = A$ sen $\omega_n t$, entonces, igualando las dos expresiones de energía máxima,

$$\tfrac{1}{2}(m + \tfrac{1}{3}\rho L)(\omega_n A)^2 = \tfrac{1}{2}kA^2$$

la cual da:

$$\omega_n = \sqrt{k/(m + \tfrac{1}{3}\rho L)} \text{ rad/seg}$$



Si ρ es despreciable comparado con m, entonces $\omega_n = \sqrt{k/m}$, que es la frecuencia angular natural del sistema simple masa-resorte mostrado en el problema 1.

12. En la figura 1-17 se muestra un péndulo simple. Determine la frecuencia natural de oscilación, (*a*) si la masa de la varilla es pequeña comparada con la masa del extremo, (*b*) si la masa de la varilla no es despreciable.



Fig. 1-17

(*a*) *Método de la energía:*

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0$$

Para una rotación pequeña de la masa alrededor del pivote,

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \tfrac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2, \qquad \text{E.P.} = mgL(1 - \cos\theta)$$

o

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL \operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta} = 0$$
$$\ddot{\theta} + (g/L)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Para un ángulo de oscilación pequeño, sen $\theta \doteq \theta$, entonces la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0 \qquad \text{con} \qquad \omega_n = \sqrt{g/L} \text{ rad/seg}$$

(b) Sea M la masa de la varilla, la cual actúa en el centro de ésta, equidistante de los dos extremos.

$$\text{E.C.} = \text{E.C. de la masa} + \text{E.C. de la varilla}$$
$$= \tfrac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}(1/3)M(L\dot{\theta})^2$$
$$\text{E.P.} = \text{E.P. de la masa} + \text{E.P. de la varilla}$$
$$= mgL(1 - \cos\theta) + Mg(L/2)(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = (m + M/3)L^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + gL(m + M/2)\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{m + M/2}{m + M/3}\,\text{sen}\,\theta\right](g/L) = 0$$

Para un ángulo de oscilación pequeño, sen $\theta \doteq \theta$ y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\ddot{\theta} + \frac{m + M/2}{m + M/3}(g/L)\theta = 0 \qquad \text{con} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{m + M/2}{m + M/3}(g/L)} \text{ rad/seg}$$

Obsérvese que si M es mucho más pequeña que m, entonces $\dfrac{1 + M/2m}{1 + M/3m}$ es prácticamente 1 y ω_n tiene aproximadamente el mismo valor que en la parte (a).

13. El péndulo compuesto, que se muestra, es un cuerpo rígido de masa m y está pivoteado en un punto situado a una distancia d de su centro de masa G. El péndulo puede girar libremente por la acción de la fuerza de gravedad. Encuentre su frecuencia de oscilación.

En cualquier instante la única fuerza que actúa es el peso. Entonces,

$$J\ddot{\theta} = -mgd\,\text{sen}\,\theta$$

es la ecuación de movimiento, donde J es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación.

Considerando únicamente pequeñas oscilaciones, sen $\theta \doteq \theta$ y

$$\ddot{\theta} + (mgd/J)\theta = 0, \qquad \omega_n = \sqrt{mgd/J} \text{ rad/seg}$$

Pero $\omega_n = \sqrt{g/d}$ para un péndulo simple de longitud d. Por tanto, J/md puede definirse como la longitud del péndulo simple equivalente.

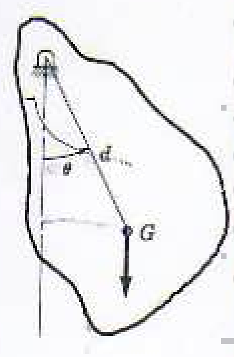


Fig. 1-18

14. Una varilla rígida de sección uniforme se restringe para moverse verticalmente por la acción de dos resortes, uno lineal y otro torsional, como se muestra en la figura 1-19. Calcule la frecuencia de oscilación vertical de la varilla.

Aplicando la ecuación para par, $\Sigma M = J\ddot{\theta}$,

$$-K\theta - 2kL^2\,\text{sen}\,\theta = (mL^2/3)\,\ddot{\theta}$$

donde m es la masa de la varilla y J es el momento de inercia de la varilla, con eje de rotación en el extremo. Por tanto:

$$(mL^2/3)\,\ddot{\theta} + K\theta + 2kL^2\theta = 0$$

y

$$\omega_n = \sqrt{\frac{3K + 6kL^2}{mL^2}} \text{ rad/seg}$$

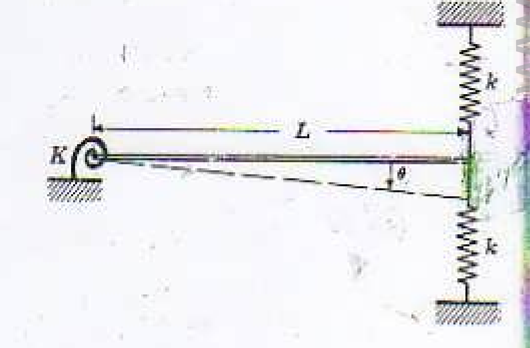


Fig. 1-19

15. La masa M, fijada en el extremo de la cuerda de un péndulo cónico, está girando alrededor del eje vertical, como se muestra en la figura 1-20. El plano de la trayectoria circular es horizontal y ascenderá cuando aumente la velocidad de rotación. Determine la frecuencia del sistema.



Del diagrama de cuerpo libre de la masa M,

$$\Sigma F_n = Ma_n \quad \text{o} \quad T \operatorname{sen}\theta = M(L \operatorname{sen}\theta)\omega^2$$

donde ω es la velocidad angular de rotación de la masa en el instante considerado. Así mismo,

$$\Sigma F_v = Ma_v \quad \text{o} \quad T\cos\theta - Mg = Ma_v$$

Pero $a_v = 0$, por tanto $T\cos\theta = Mg$ o $T = Mg/(\cos\theta)$. Remplazando este valor de T en la primera ecuación, se tiene:

$$\frac{Mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = M(L\operatorname{sen}\theta)\omega^2 \quad \text{y} \quad \omega_n = \sqrt{g/(L\cos\theta)} \text{ rad/seg}$$

Si $\theta = 0$, entonces $\cos\theta = 1$, y $\omega_n = \sqrt{g/L}$ que es la frecuencia natural de un péndulo simple. Esto significa que el péndulo cónico (llamado a veces esférico), se reduce a un péndulo simple si θ es igual a cero.

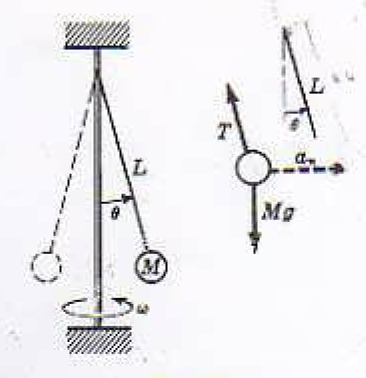


Fig. 1-20

16. Determinar la ecuación de movimiento del péndulo simple mostrado en la figura 1-21, cuando tiene importancia el efecto de la amplitud de oscilación.

Empleando la ley del movimiento de Newton,

$$-mg\operatorname{sen}\theta = mL\ddot{\theta} \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + (g/L)\operatorname{sen}\theta = 0$$

donde el signo menos indica que la fuerza actúa en la dirección en que decrece θ.

Para oscilaciones pequeñas, $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$ y la ecuación se reduce a $\ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0$, que es la fórmula usual para un péndulo simple.

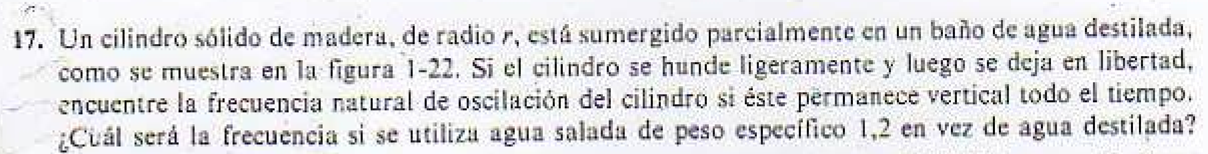
Para valores de θ ligeramente más grandes, $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \cdots$ y la ecuación de movimiento se convierte en, si se toman únicamente los dos primeros términos para la segunda aproximación,

$$\ddot{\theta} + (g/L)\theta - (g/6L)\theta^3 = 0$$

Fig. 1-21

que es una forma específica de la ecuación general de Duffing en vibraciones no lineales. (Las vibraciones no lineales se tratan por separado y con muchos más detalles en un capítulo diferente.)

En consecuencia, la suposición de que los ángulos de oscilación son pequeños no sólo simplifica el problema sino que también nos limita al caso lineal.



17. Un cilindro sólido de madera, de radio r, está sumergido parcialmente en un baño de agua destilada, como se muestra en la figura 1-22. Si el cilindro se hunde ligeramente y luego se deja en libertad, encuentre la frecuencia natural de oscilación del cilindro si éste permanece vertical todo el tiempo. ¿Cuál será la frecuencia si se utiliza agua salada de peso específico 1,2 en vez de agua destilada?

Sea el desplazamiento del cilindro x pies; entonces el peso del agua desplazada es $\pi r^2 x(64{,}4)$ lb y esta será la fuerza restauradora. La masa del cilindro es $\pi r^2 hs(64{,}4)/g$, donde s es la gravedad específica de la madera.



Por la ley del movimiento de Newton, $\Sigma F = ma$. Puesto que la única fuerza que actúa es el peso del agua desplazada, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{o} \quad \frac{64{,}4\pi r^2 hs}{g}\ddot{x} + 64{,}4\pi r^2 x = 0,$$

y

$$\omega_n = \sqrt{g/hs} \text{ rad/seg}$$

Si se utiliza agua salada, la fuerza restauradora será $1{,}2(64{,}4\pi r^2 x)$, mientras que la masa del cilindro permanece invariable. La ecuación de movimiento es ahora

$$\frac{64{,}4\pi r^2 hs}{g}\ddot{x} + 1{,}2(64{,}4\pi r^2 x) = 0$$

y

$$\omega_n = \sqrt{1{,}2g/hs} \text{ rad/seg}$$

En consecuencia, la frecuencia aumenta cuando la fuerza restauradora aumenta.

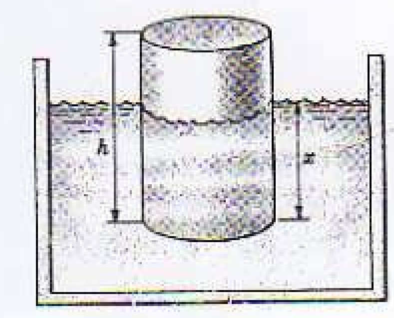


Fig. 1-22

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Para un aro circular, de masa m y radio r, está unido ...dio de un resorte de módulo k, como se mues... la figura 1-23. Si el cilindro puede rodar sobre (la) superficie horizontal rugosa, sin deslizar, encuentre su frecuencia.

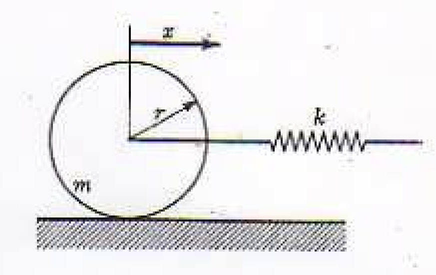


Fig. 1-23

Método de la energía:

La energía total del sistema consta de energía cinética (de rotación y de traslación) y de energía potencial y permanece constante todo el tiempo.

E.C. de traslación $= \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, E.C. de rotación $= \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$, donde el momento de inercia del cilindro es $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$. Así mismo $r\theta = x$ o $r\dot{\theta} = \dot{x}$. Por tanto, para el sistema en cualquier instante,

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)(\dot{x}/r)^2 = \tfrac{3}{4}m\dot{x}^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2$$

y
$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0 \qquad \text{o} \qquad (\tfrac{3}{2}m\ddot{x} + kx)\dot{x} = 0$$

Puesto que $\dot{x}$ no siempre es cero, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\tfrac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0, \qquad \text{y de aquí,} \quad \omega_n = \sqrt{2k/3m} \text{ rad/seg}$$

Ley del movimiento de Newton:

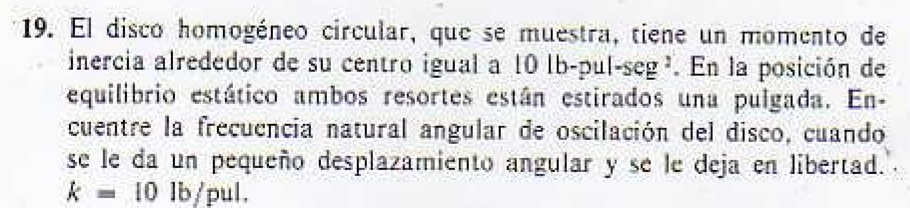
Aplicando la ley del movimiento de Newton al cilindro,

$$\Sigma F = ma \qquad \text{o} \qquad m\ddot{x} = -kx + F_f$$

donde F_f es la fuerza de fricción.

Usando la ecuación de momento torsional, $\Sigma M = J_0\ddot{\theta}$,

$$J_0\ddot{\theta} = -F_f r \qquad \text{o} \qquad (\tfrac{1}{2}mr^2)(\ddot{x}/r) = -F_f r$$



y por tanto $F_f = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$. Remplazando esta expresión por F_f en la ecuación de fuerzas, obtenemos:

$$m\ddot{x} = -kx - \tfrac{1}{2}m\ddot{x} \qquad \text{o} \qquad \tfrac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0$$

y de aquí, $\qquad \omega_n = \sqrt{2k/3m}$ rad/seg

Fig. 1-24

19. El disco homogéneo circular, que se muestra, tiene un momento de inercia alrededor de su centro igual a 10 lb-pul-seg². En la posición de equilibrio estático ambos resortes están estirados una pulgada. Encuentre la frecuencia natural angular de oscilación del disco, cuando se le da un pequeño desplazamiento angular y se le deja en libertad. $k = 10$ lb/pul.

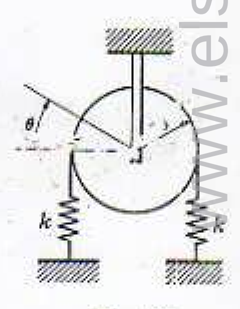


Fig. 1-25

La tensión inicial en el resorte es 10 lb y el cambio de tensión es $10(10\theta)$ lb. Utilizando la ecuación de momento torsional $\Sigma M_0 = I\ddot{\theta}$, tenemos:

$$I_0\ddot{\theta} = [(10 - 100\theta) - (10 + 100\theta)]\,10$$
o
$$\ddot{\theta} + 200\,\theta = 0$$

de donde $\omega_n = \sqrt{200} = 14.2$ rad/seg

20. La masa de la varilla delgada de sección uniforme, que se muestra en la figura 1-26, es peque... comparada con la masa que tiene colocada en su extremo. Calcule la frecuencia natural de osc... lación de la masa, suponiendo que la oscilación es pequeña.

Usando la ecuación de momento torsional, $\Sigma M_0 = I\ddot{\theta}$, obtenemos:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL \operatorname{sen}\theta - (a\cos\theta)k(a \operatorname{sen}\theta)$$

donde $a \operatorname{sen}\theta$ es la cantidad de resorte estirado. Suponiendo que las oscilaciones son pequeñas, $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$, $\cos\theta \doteq$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$mL^2\ddot{\theta} + (mgL + ka^2)\theta = 0$$

o

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{mgL + ka^2}{mL^2}\right)\theta = 0$$

que nos da:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgL + ka^2}{mL^2}} \text{ rad/seg}$$

Si la constante de elasticidad k es cero, la expresión para la frecuencia natural angular del péndulo se reduce a la expresión familiar obtenida para un péndulo simple, $\omega_n = \sqrt{g/L}$ rad/seg

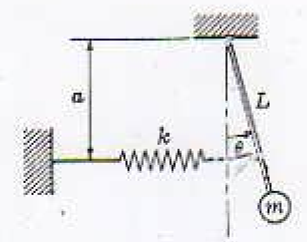
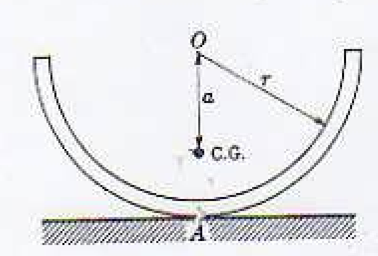




Fig. 1-26

21. Utilice el método de Rayleigh para encontrar la frecuencia natural del casco semi-circular de masa m y radio r que rueda de un lado a otro sin deslizar, como se muestra en la figura 1-27.



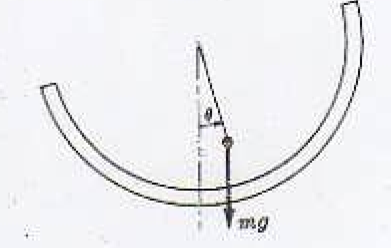


Fig. 1-27

$$(\text{E.C.})_{max} = \tfrac{1}{2}I_A\omega_n^2 = mr(r-a)\omega_n^2$$

donde $I_A = I_{c.g.} + m(r-a)^2 = I_0 - ma^2 + m(r-a)^2 = 2mr(r-a)$. Entonces

$$(\text{E.C.})_{max} = (\text{E.P.})_{max}$$

o

$$mr(r-a)\omega_n^2 = mga(1-\cos\theta)$$

y

$$\omega_n = \sqrt{\frac{ga(1-\cos\theta)}{r(r-a)}} \text{ rad/seg}$$

22. Use el método de la energía para encontrar la frecuencia natural de oscilación del cilindro homogéneo que se muestra en la figura 1-28.

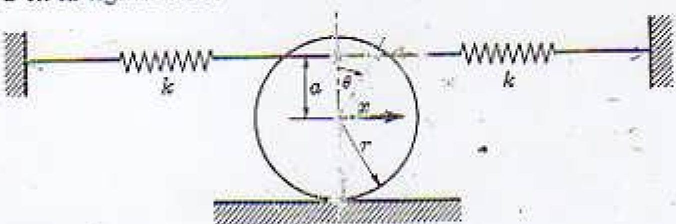


Fig. 1-28

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{3}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

donde m es la masa del cilindro y J_0 su momento de inercia.

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2 = 2\cdot\tfrac{1}{2}k(r+a)^2\theta^2$$

donde $x = r\theta$ y sen $\theta \doteq \theta$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0 \quad \text{o} \quad \tfrac{3}{2}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2k(r+a)^2\theta\dot{\theta} = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \frac{4k(r+a)^2}{3mr^2}\theta = 0$$

de donde,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{4k(r+a)^2}{3mr^2}} \text{ rad/seg}$$

23. En el sistema masa-resorte-polea, mostrado en la figura 1-29, la cuerda se puede suponer inextensible. Encuentre la frecuencia natural de vibración si la masa m se desplaza ligeramente y luego se deja en libertad. Utilice el método de la energía.

$$\begin{aligned} \text{E.C. del sistema} &= \text{E.C. masa} + \text{E.C. polea} \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{y}^2 + \tfrac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}M(\dot{x}^2/4) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}Mr^2)(\dot{x}/r)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{3}{8}M\dot{x}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E.P. del sistema} &= \text{energía elástica del resorte} \\ &= \tfrac{1}{2}ky^2 = \tfrac{1}{2}k(\tfrac{1}{2}x)^2 = \tfrac{1}{8}kx^2 \end{aligned}$$

Entonces, $\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0$ o $m\dot{x}\ddot{x} + \frac{3}{4}M\ddot{x}\dot{x} + \frac{1}{4}kx\dot{x} = 0$

y $\dot{x}(4m\ddot{x} + 3M\ddot{x} + kx) = 0$

Puesto que $\dot{x}$ no siempre es igual a cero,

$$\ddot{x}(4m + 3M) + kx = 0, \qquad \text{y} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{4m+3M}} \text{ rad/seg}$$

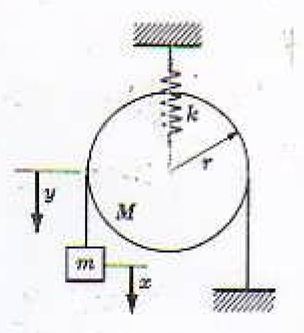


Fig. 1-29

24. La masa m está suspendida por medio de una cuerda cogida al disco homogéneo circular de masa M y radio R pies, como se muestra en la figura 1-30. El disco no puede rotar debido a la acción de un resorte enganchado a una distancia r pies del centro. Si la masa se desplaza desde la posición de reposo hacia abajo, determine la frecuencia de oscilación.

Aplicando la ley del movimiento de Newton para la masa,

$$\Sigma F = ma \qquad \text{o} \qquad T - mg = -ma$$

y la tensión $T = m(g - a)$.

Sea α la aceleración angular del disco; entonces, $a = R\alpha$ y

$$T = m(g - R\alpha) = m(g - R\ddot{\theta})$$

Cuando la masa está en reposo, el par debido al peso de la masa es balanceado por el momento debido a la fuerza restauradora del resorte, es decir, $mgR = T_0r$, donde T_0 es la tensión inicial en el resorte, entonces $T_0 = mgR/r$.

El par adicional debido al nuevo alargamiento del resorte es $kr(r\theta)$, donde k es el módulo del resorte. Así mismo, el par total debido al peso de la masa es

$$mR(g - R\ddot{\theta})$$

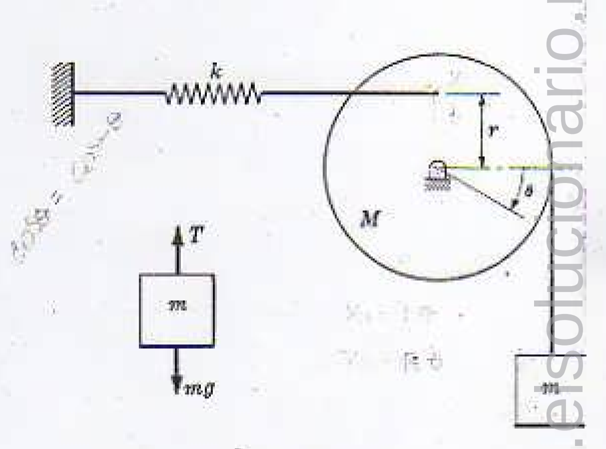


Fig. 1-30

Utilizando la ecuación de par, $\Sigma M = J_0\alpha$,

$$J_0\ddot{\theta} = -(kr^2\theta + mgR) + (mgR - mR^2\ddot{\theta})$$

o

$$(J_0 + mR^2)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0$$

que es la ecuación diferencial de movimiento de un sistema que tiene movimiento armónico simple, por tanto:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kr^2}{J_0 + mR^2}} = \sqrt{\frac{kr^2}{R^2(M/2 + m)}} \text{ rad/seg}$$

donde $J_0 = \frac{1}{2}MR^2$ es el momento masa de inercia del disco respecto al eje longitudinal central.

25. El cilindro de masa m y radio r, mostrado en la figura 1-31, rueda sin deslizar sobre una superficie circular de radio R. Determine la frecuencia de oscilación cuando el cilindro se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio. Utilice el método de la energía.

La energía total del sistema, que consta de energía cinética (de rotación y de traslación) y de energía potencial, permanece constante todo el tiempo.

E.C. de traslación $= \frac{1}{2}m\,[(R-r)\dot{\theta}]^2$. E.C. de rotación $= \frac{1}{2}J_0(\dot{\phi}-\dot{\theta})^2$, donde el momento de inercia del cilindro es $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$. Así mismo, longitud del arco $AB = R\theta = r\phi$, por tanto, $\phi = R\theta/r$. Por consiguiente, para el sistema en cualquier instante,

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)(R/r-1)^2\dot{\theta}^2$$
$$\text{E.P.} = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

y $$\frac{d}{dt}(\text{E.C.}+\text{E.P.}) = 0 \quad \text{o} \quad \tfrac{3}{2}(R-r)^2m\ddot{\theta} + mg(R-r)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Para ángulos de oscilación pequeños, sen $\theta \doteq \theta$ y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)}\theta = 0, \quad \text{y de aquí,} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}\ \text{rad/seg}$$

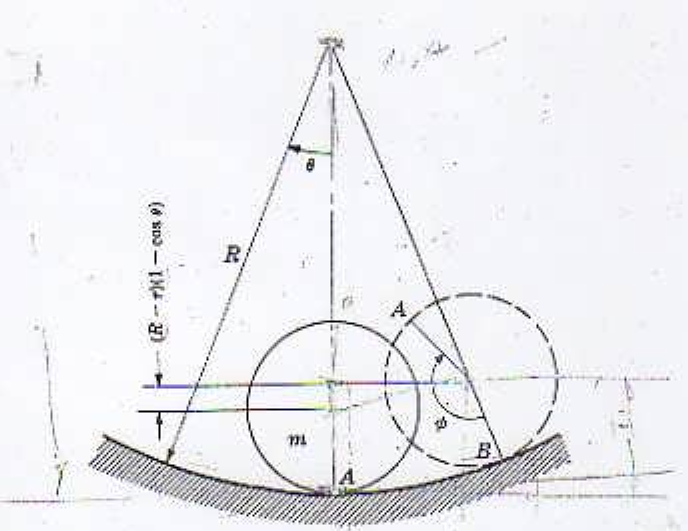


Fig. 1-31

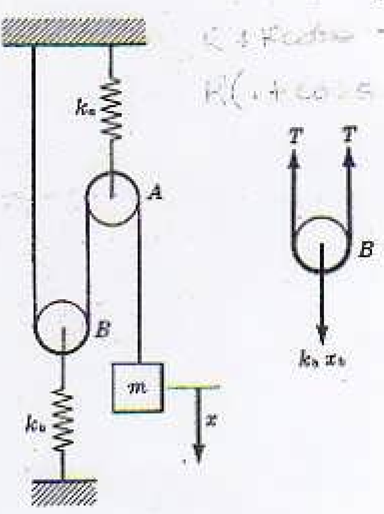


Fig. 1-32

26. Si la masa de las poleas, mostradas en la figura 1-32, es pequeña y la cuerda es inextensible, encuentre la frecuencia natural del sistema.

Sea T la tensión en la cuerda y x_a y x_b los desplazamientos de las poleas A y B, respectivamente. Entonces, si la polea B está fija, $x = 2x_a$; por el contrario, si la polea A está fija, $x = 2x_b$. Pero como ni la polea A ni la polea B están fijas,

$$x = 2x_a + 2x_b$$

Considerando la polea B como cuerpo libre y haciendo suma de fuerzas:

$$2T - k_bx_b = 0 \quad \text{o} \quad 2T = k_bx_b$$

Similarmente, para la polea A:

$$2T = k_ax_a \quad \text{o} \quad 2T = k_ax_a = k_bx_b$$

Entonces, $$x = 2x_a + 2x_b = 4T(1/k_a + 1/k_b) = T/k_{eq}$$

donde $k_{eq} = \dfrac{1}{4(1/k_a + 1/k_b)}$ es la constante del resorte equivalente. De este modo se reduce el problema a un sistema simple masa-resorte, con constante de elasticidad igual a k_{eq}.

Pero $m\ddot{x} + kx = 0$ es la ecuación de movimiento de un sistema simple masa-resorte, con frecuencia natural $\sqrt{k/m}$, en consecuencia:

$$\omega_n = \sqrt{k_{eq}/m} = \sqrt{\frac{k_ak_b}{4m(k_a+k_b)}}\ \text{rad/seg.}$$

27. La masa m se asegura a uno de los extremos de una varilla rígida de peso despreciable, que está rígidamente unida al centro de un cilindro homogéneo de radio r, como se muestra en la figura 1-33. Si el cilindro rueda sin deslizar, ¿cuál es la frecuencia natural de oscilación del sistema?

Por el método de Newton:

En cualquier instante considerado, las masas M y m están rotando alrededor del punto C, centro instantáneo de velocidad cero. Por tanto, la ecuación de movimiento toma la forma $\Sigma M_C = J_C\ddot{\theta}$, donde J_C es el momento de inercia de las masas M y m con respecto al punto C. Entonces,

$$J_C = (\tfrac{1}{2}Mr^2 + Mr^2) + mR^2$$

donde $R^2 = L^2 + r^2 - 2rL\cos\theta$. Para pequeñas oscilaciones tenemos que $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$, $\cos\theta \doteq 1$ y

$$J_C = 3Mr^2/2 + m(L-r)^2$$

Fig. 1-33

Por tanto la ecuación de movimiento se convierte en:

$$[3Mr^2/2 + m(L-r)^2]\ddot{\theta} = -mgL\operatorname{sen}\theta = -mgL\theta$$

o $\quad \ddot{\theta} + \dfrac{mgL}{3Mr^2/2 + m(L-r)^2}\theta = 0, \quad$ y así, $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{mgL}{3Mr^2/2 + m(L-r)^2}}$ rad/seg.

Por el método de Rayleigh:

$$(\text{E.C.})_{max} = (\text{E.P.})_{max} \qquad \text{o} \qquad \tfrac{1}{2}J_C(\dot{\theta})^2_{max} = mg(\Delta h)_{max}$$

Supongamos que el movimiento es armónico simple, entonces $\theta = A\operatorname{sen}\omega t$ y

$$(\dot{\theta})_{max} = (\omega A\cos\omega t)_{max} = \omega A$$

$$(\Delta h) = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta) = L\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right)\right]$$

$$(\Delta h)_{max} = L\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2_{max}}{2!} + \frac{\theta^4_{max}}{4!}\right)\right] = \tfrac{1}{2}L\theta^2_{max} = \tfrac{1}{2}LA^2$$

Igualando las dos expresiones de energía, tenemos:

$\tfrac{1}{2}[3Mr^2/2 + m(L-r)^2]\omega^2A^2 = mg(\tfrac{1}{2}LA^2), \quad$ y $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{mgL}{3Mr^2/2 + m(L-r)^2}}$ rad/seg.

VIBRACIONES FORZADAS CON AMORTIGUAMIENTO

28. En la figura 1-34 se muestra un sistema generalizado de un solo grado de libertad que tiene vibración forzada con amortiguamiento. Estudie su movimiento general.

Empleando la ley del movimiento de Newton,

$$\begin{aligned}\Sigma m\ddot{x} &= \text{suma de fuerzas en la dirección } x\\ &= -k(x+\delta_{st}) + mg - c\dot{x} + F_0\operatorname{sen}\omega t\end{aligned}$$

Pero $k\delta_{est} = mg$, donde mg es el peso de la masa. Por tanto, la ecuación de movimiento toma su forma más general

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\operatorname{sen}\omega t$$

La solución general de esta ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes es:

$$x = x_c + x_p$$

donde x_c es llamada la solución complementaria o solución para la parte de la ecuación $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$. x_p es la solución particular de la ecuación dada.

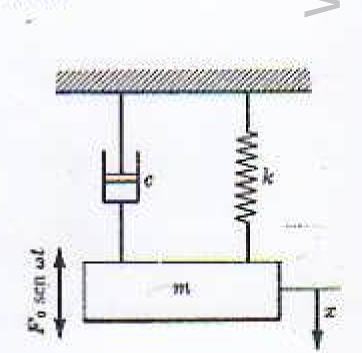


Fig. 1-34

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

La forma corriente de la solución complementaria es:

$$x_c = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

donde A y B son constantes arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales impuestas al sistema y r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación auxiliar $mr^2 + cr + k = 0$. Entonces,

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \qquad \text{y} \qquad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Si $\omega_n^2 = k/m$ y $\zeta = c/2m\omega_n$, donde ζ es el factor de amortiguamiento, entonces,

$$r_1 = \omega_n(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}), \qquad r_2 = \omega_n(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})$$

Estos valores de r pueden ser reales y diferentes, reales e iguales, o complejos conjugados, según sea la magnitud de ζ, es decir, si ζ es mayor, igual o menor que la unidad.

Si ζ es mayor que la unidad, los valores de r son reales y negativos. Por tanto, según la solución complementaria de la ecuación de movimiento, el movimiento oscilatorio no es posible, no importa cuáles sean las condiciones iniciales impuestas al sistema. Este es un movimiento sobreamortiguado, donde

$$x_c = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$$

Si ζ es igual a la unidad, los valores de r son iguales a $-\omega_n$. Nuevamente el movimiento no es oscilatorio y con el tiempo su amplitud disminuirá hasta cero. Este es un movimiento críticamente amortiguado, donde

$$x_c = (C + Dt)\,e^{-\omega_n t}$$

Si ζ es menor que la unidad, los valores de r son complejos conjugados. Estos valores son:

$$r_1 = \omega_n(-\zeta + i\sqrt{1 - \zeta^2}), \qquad r_2 = \omega_n(-\zeta - i\sqrt{1 - \zeta^2})$$

Si la frecuencia natural angular amortiguada se define como $\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n$, la ecuación para el caso subamortiguado toma la forma siguiente:

$$x_c = e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_d t + B \operatorname{sen} \omega_d t)$$

o

$$x_c = Ce^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\phi = \tan^{-1}(A/B)$. Este es un movimiento armónico de frecuencia angular ω_d, cuya amplitud $Ce^{-\zeta\omega_n t}$ decrece exponencialmente con el tiempo.

Es claro que, no importa cuál de los tres valores tome ζ, la solución complementaria $x_c(t)$, generalmente llamada transitoria, desaparecerá con el tiempo. Así mismo, la rata de decaimiento y la frecuencia natural del sistema dependen únicamente de los parámetros del sistema, mientras que la amplitud de la vibración y el ángulo de fase están determinados por las condiciones iniciales.

La solución particular x_p tiene la forma $(A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t)$; por tanto:

$$x_p = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\left[(k - m\omega^2) \operatorname{sen} \omega t - c\omega \cos \omega t\right]$$

o

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

donde ω = frecuencia angular de la excitación y $\psi = \tan^{-1}\dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$.

En consecuencia, puede concluirse que la solución particular tiene la misma frecuencia que la excitación y es la vibración del estado estacionario del sistema. La amplitud de la vibración del estado estacionario depende de la amplitud y de la frecuencia de la excitación. En resonancia, esto es, cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia natural, o sea $\omega/\omega_n = 1$, la amplitud de vibración está limitada únicamente por el factor de amortiguamiento ζ. La vibración del estado estacionario no está en fase con la excitación; su variación en un ángulo de fase respecto a la frecuencia de excitación se debe a la presencia del amortiguamiento en el sistema.

La solución general es, entonces,

$$x = De^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) + E \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

donde la primera parte de la solución es la transitoria y la segunda parte es la respuesta del estado estacionario.

El análisis detallado de este sistema generalizado de un solo grado de libertad es muy útil; pone de manifiesto el concepto de frecuencia natural, el papel que desempeña el amortiguamiento en el movimiento oscilatorio del sistema y la respuesta a la excitación. Los resultados y las conclusiones sacadas del modelo estudiado, pueden aplicarse ventajosamente a los problemas físicos de esta clase de sistemas de un solo grado de libertad.

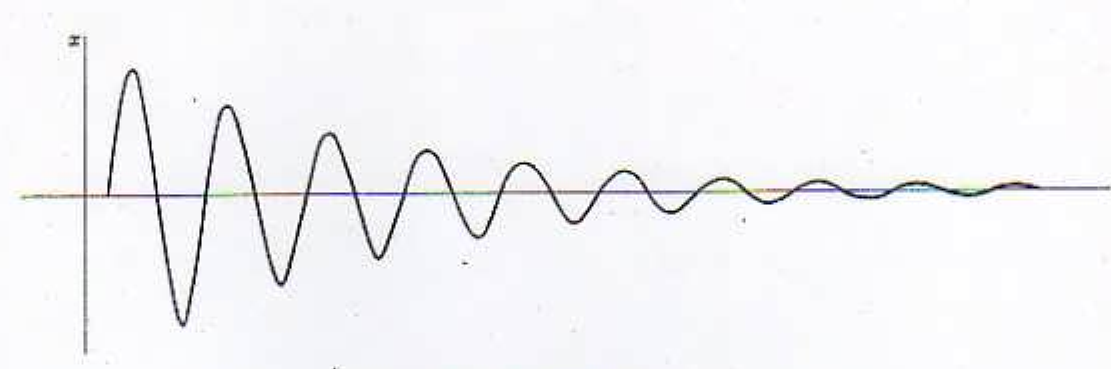


Fig. 1-35. Vibración libre.

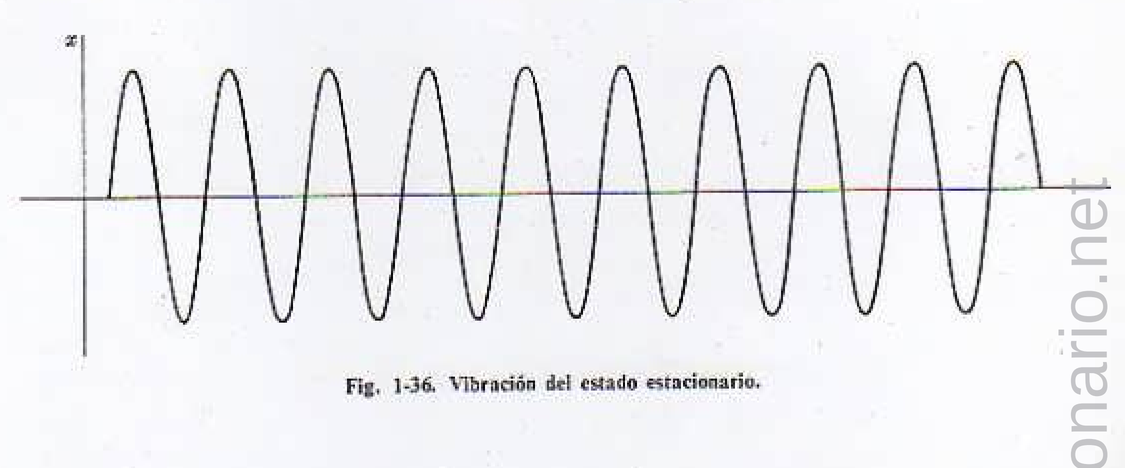


Fig. 1-36. Vibración del estado estacionario.

29. La masa, mostrada en la figura 1-37, está inicialmente en reposo, cuando se le imprime una velocidad de 4 pul/seg. Encuentre el desplazamiento y la velocidad de la masa en un instante cualquiera. Dados: $c = 0{,}85$ lb-seg/pul, $k = 25$ lb/pul y $W = 40$ lb.

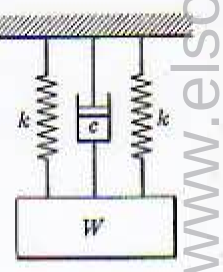


Fig. 1-37

Como en el problema 28, la ecuación de movimiento es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = 0$$

y $$x = e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_d t + B \text{ sen } \omega_d t)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{50/m} = 22$ rad/seg, $m = 40/(32{,}2 \times 12)$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{0{,}85}{2[40/(32{,}2 \times 12)]22} = 0{,}181$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n = 22\sqrt{1-0{,}181^2} = 21{,}6 \text{ rad/seg.}$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones dadas,

$$x = e^{-3{,}98t}(A \cos 21{,}6t + B \text{ sen } 21{,}6t)$$

y $$\dot{x} = -3{,}98\, e^{-3{,}98t}(A \cos 21{,}6t + B \text{ sen } 21{,}6t) + 21{,}6\, e^{-3{,}98t}(-A \text{ sen } 21{,}6t + B \cos 21{,}6t)$$

En $t = 0$, $x = 0$; entonces $A = 0$. En $t = 0$, $\dot{x} = 4$; entonces $B = 4/21{,}6 = 0{,}185$. En consecuencia,

$$x = 0{,}185\, e^{-3{,}98t} \text{ sen } 21{,}6t$$

$$\dot{x} = e^{-3{,}98t}(4 \cos 21{,}6t - 0{,}737 \text{ sen } 21{,}6t)$$

o $$\dot{x} = 4{,}08\, e^{-3{,}98t} \cos (21{,}6t + 9{,}5^\circ)$$

30. Calcule el estado transitorio y la respuesta del estado estacionario de la masa del problema si sobre la masa actúa una fuerza de excitación $F_0 \text{ sen } \omega t = 10 \text{ sen } 15t$.

Como se vio en el problema 29, la solución del estado transitorio es:

$$x_c = e^{-3,98t} \operatorname{sen}(21,6t + \phi)$$

donde $\phi = \tan^{-1} A/B$.

La respuesta del estado estacionario es:

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

$$= \frac{10}{\sqrt{\left(50 - \dfrac{40 \times 15^2}{32,2 \times 12}\right)^2 + (0,85 \times 15)^2}} \operatorname{sen}(15t - \psi) = 0,337 \operatorname{sen}(15t - 28°)$$

donde $\psi = \tan^{-1} \dfrac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} = \dfrac{2(0,18)(15/22)}{1 - (15/22)^2} = 28°$.

Ahora, $x = x_c + x_p = E\, e^{-3,98t} \operatorname{sen}(21,6t + \phi) + 0,337 \operatorname{sen}(15t - 28°)$

Condiciones iniciales: En $t = 0,\ x = 0$ y $E \operatorname{sen}\phi + 0,337 \operatorname{sen}(-28°) = 0.$

En $t = 0,\ \dot{x} = 4$ y $E[-3,98 \operatorname{sen}\phi + 21,6 \cos\phi] + (0,337)(15)\cos(-28°) = 4.$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos $E = 0,176$ y $\phi = 65°$. Por tanto,

$$x = 0,176\, e^{-3,98t} \operatorname{sen}(21,6t + 65°) + 0,345 \operatorname{sen}(15t - 28°)$$

31. Resuelva el problema 28 por el método de la impedancia mecánica.

La ecuación de movimiento está dada por $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen}\omega t$.

Puesto que $\mathbf{F} = F_0 e^{i\omega t} = F_0(\cos\omega t + i \operatorname{sen}\omega t)$, si se usa $\mathbf{F}$ para representar $F_0 \operatorname{sen}\omega t$, la respuesta debe ser Im($F_0 e^{i\omega t}$), es decir, la parte imaginaria de la solución.

Sea el vector desplazamiento $= \mathbf{X} = Xe^{i(\omega t - \psi)}$, el vector velocidad $= i\omega\mathbf{X}$, el vector aceleración $= -\omega^2\mathbf{X}$. Remplazando estos valores en la ecuación de movimiento dada,

$$(k - m\omega^2 + ic\omega)X\, e^{-i\psi} = F_0 \qquad \text{o} \qquad X\, e^{-i\psi} = \frac{F_0}{(k - m\omega^2 + ic\omega)}$$

Pero $X\,e^{-i\psi} = X(\cos\psi - i \operatorname{sen}\psi)$, donde $\psi = \tan^{-1} \omega c/(k - m\omega^2)$. Así que,

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

y

$$x_p = \operatorname{Im}(\mathbf{X}) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \psi)$$

32. Encuentre la vibración del estado estacionario del problema 30 por el método de la impedancia mecánica.

Como en el problema 31, sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación de movimiento, tenemos:

$$[(k - m\omega^2) + ic\omega]X\, e^{i(\omega t - \psi)} = F_0\, e^{i\omega t}$$

$$[50 - (40/386)(15)^2 + i(0,85)(15)]X\, e^{-i\psi} = 10$$

$$(26,7 + i12,8)X e^{-i\psi} = 10, \quad X\, e^{-i\psi} = \frac{10}{26,7 + i12,8}$$

y $X = 0,345$ con $\psi = \tan^{-1}(12,8/26,7) = 28°$. Entonces,

$$\mathbf{X} = X\, e^{i(\omega t - \psi)} = 0,345\, e^{i(15t - 28°)}$$

y

$$x = \operatorname{Im}(\mathbf{X}) = X \operatorname{sen}(\omega t - \psi) = 0,345 \operatorname{sen}(15t - 28°)$$

DESBALANCEAMIENTO ROTACIONAL

33. Una máquina que tiene una parte rotatoria se simplifica suponiendo que tiene una masa propia M y un desbalanceamiento me, como se muestra en la figura 1-38. Determinar la respuesta del estado estacionario de la máquina.

Suponer que la máquina está restringida a moverse únicamente en la dirección vertical. La fuerza centrífuga debida al desbalanceamiento en la parte rotatoria de la máquina es $me\omega^2$. Puesto que la componente vertical de la fuerza centrífuga afecta el movimiento de la máquina, la excitación equivalente es $me\omega^2$ sen ωt, donde ω es la velocidad angular de la parte rotatoria de la máquina. Por tanto, la ecuación diferencial de movimiento es:

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2 \text{ sen } \omega t$$

que es una vibración forzada amortiguada. Resolviendo esta ecuación diferencial, como se hizo anteriormente, tenemos:

$$x = \frac{(me\omega^2)/k}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}} \text{ sen } (\omega t - \psi)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/M}$ y $\psi = \tan^{-1}\dfrac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}$

Por tanto, $me\omega^2$ puede considerarse como la amplitud F_0 de la excitación armónica.

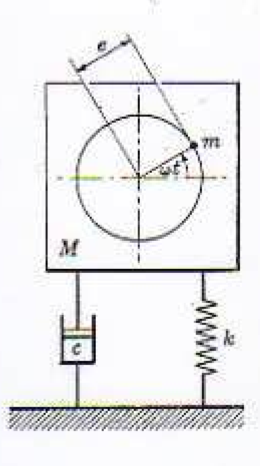


Fig. 1-38

34. El rotor de masa m está montado sobre un eje elástico, cuya masa es despreciable comparada con masa del rotor. El rotor tiene una excentricidad e, a partir del centro. Encuentre la velocidad críti del eje si la frecuencia natural del rotor es $\sqrt{k/m}$, donde k es la rigidez equivalente del eje.

Sea R el centro de rotación, O el centro geométrico del rotor y G el centro de masa del rotor, como se muestra en la figura 1-39.

En cualquier instante de la rotación, la fuerza restauradora debida al eje elástico es kr, mientras que la fuerza centrífuga debida al desbalanceamiento es $m(e+r)\omega^2$. Estas dos fuerzas deben ser iguales, es decir que,

$$kr = m(e+r)\omega^2 \quad \text{o} \quad k/m = \omega^2(e+r)/r$$

Pero $k/m = \omega_n^2$; por tanto, la ecuación se convierte en:

$$\omega_n^2 r\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) = e\omega^2 \quad \text{o} \quad r = \frac{e(\omega^2/\omega_n^2)}{1-(\omega^2/\omega_n^2)}$$

Si $\omega^2 = \omega_n^2$, el valor de r resultará muy grande, es decir, el eje es inestable. Por tanto, la velocidad crítica del eje es $\omega = \sqrt{k/m} = \omega_n$; en esta velocidad de rotación tendrá lugar la resonancia.

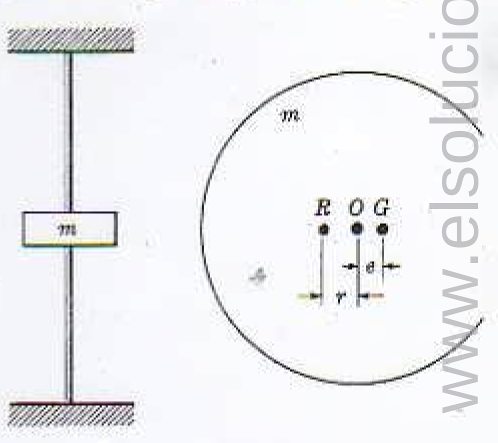


Fig. 1-39

35. La armadura de un motor eléctrico pesa 20 lb y su centro de gravedad está a 0,01 pul del centro soporte del eje. El motor, que pesa un total de 60 lb, reposa sobre cuatro resortes, los cuales tien una rigidez de 150 lb/pul, cada uno. Encuentre la velocidad crítica del motor y la amplitud verti de la vibración del motor, cuando éste tiene una velocidad igual a tres veces la velocidad crítica.

Constante de elasticidad total = 4(150) = 600 lb/pul.

La frecuencia natural del motor es $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{600(32{,}2)(12)/60} = 62{,}4$ rad/seg o 600 rpm. Por tanto, velocidad crítica del motor es 600 rpm (véase el problema 34). Para una velocidad igual a tres veces la velocidad crítica, fuerza debida al desbalanceamiento rotacional es $F = me\omega^2 = (20/32{,}2)(0{,}01/12)(62{,}4)^2 = 18{,}2$ lb.

Como se discutió en el problema 33, la respuesta del estado estacionario sin amortiguamiento es

$$x_p = \frac{F/k}{r^2 - 1} = \frac{me\omega^2/k}{(\omega/\omega_n)^2 - 1} = \frac{18{,}2/600}{9 - 1} = 0{,}03 \text{ pul}$$

36. Se observa que la amplitud de vibración del sistema, mostrado en la figura 1-40, decrece hasta un 25% del valor inicial, después de cinco ciclos consecutivos de movimiento, como se muestra en la figura 1-41. Determine el coeficiente de amortiguamiento c del sistema si $k = 20$ lb/pul y $m = 10$ lb.

Como se discutió en el problema 28, para una vibración libre amortiguada,

$$x_c = Ce^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

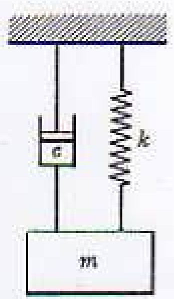


Fig. 1-40

La máxima amplitud en un ciclo ocurre cuando $\operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$ es igual a la unidad. Por esto, las máximas amplitudes son

$$x_1 = Ce^{-\zeta\omega_n t_1} \quad \text{y} \quad x_2 = Ce^{-\zeta\omega_n t_2}$$

La razón

$$x_1/x_2 = e^{\zeta\omega_n(t_2 - t_1)} = e^{\zeta\omega_n(2\pi/\omega_d)} = e^{2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

debido a que $(t_2 - t_1)$, la diferencia de tiempo entre dos amplitudes consecutivas es también el período de oscilación y $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$. El logaritmo de esta razón, x_1/x_2, es $\ln(x_1/x_2) = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} = \delta$, donde δ es llamada el *decrecimiento logarítmico*. Puesto que el coeficiente de amortiguamiento $c = 2\zeta\sqrt{km}$, conociendo la razón de dos amplitudes consecutivas o el decrecimiento logarítmico δ, se conoce el factor de amortiguamiento ζ y en consecuencia también se conoce c.

En este problema, $x_1/x_6 = 1/0{,}25$. Pero $x_1/x_6 = (x_1/x_2)(x_2/x_3)(x_3/x_4)(x_4/x_5)(x_5/x_6)$, y $\ln(x_1/x_2) = \delta$. Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación, tenemos:

$$\ln 4 = \ln(x_1/x_2) + \ln(x_2/x_3) + \ln(x_3/x_4) + \ln(x_4/x_5) + \ln(x_5/x_6)$$

o $\ln 4 = 5\delta$, $\delta = 0{,}28$.

De $\delta = 0{,}28 = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$, obtenemos $\zeta = 0{,}044$. Entonces,

$$c = 2\zeta\sqrt{km} = 2(0{,}044)\sqrt{(20/12)(10/32{,}2)} = 0{,}063 \text{ lb-seg/pul}$$

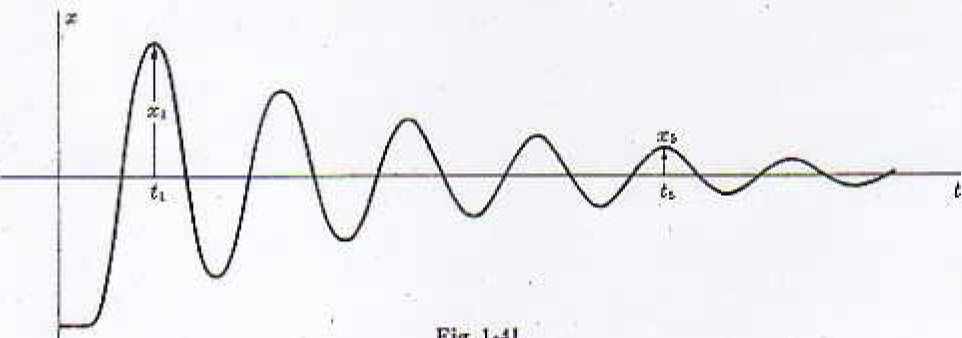


Fig. 1-41

37. El coeficiente de fricción entre las superficies secas del bloque y del plano, mostrados en la figura 1-42, es un valor constante f. La fuerza de fricción, que es constante, está actuando siempre contra el movimiento para producir lo que se conoce como el *amortiguamiento de Coulomb*. Estudie el movimiento del bloque, si a éste se le da un desplazamiento x_0 a partir de su posición central, donde los resortes no están sufriendo esfuerzo alguno.

Supongamos que el bloque se desplaza hacia la derecha y se deja en libertad; las fuerzas que actúan son la fuerza elástica kx y la fuerza de fricción fmg. Entonces $\Sigma F = ma$, que nos da:

$$-kx + fmg = m\ddot{x} \quad \text{o} \quad \ddot{x} + (k/m)x = fg$$

con solución,

$$x = A\cos\omega_n t + B\operatorname{sen}\omega_n t + fmg/k$$

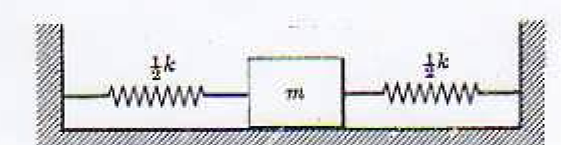


Fig. 1-42

De las condiciones iniciales: $t = 0,\ x = x_0,\ x_0 = A + fmg/k,\ A = x_0 - fmg/k.$
$t = 0,\ \dot{x} = 0,\ \omega_n B = 0.$

Puesto que ω_n no siempre es cero, $B = 0$. Por tanto, la solución toma la forma:

$$x = (x_0 - fmg/k)\cos\omega_n t + fmg/k$$

En $t = \pi/\omega_n$, es decir, en el extremo de la mitad de un ciclo, en la posición extrema izquierda,

$$x = -(x_0 - fmg/k) + fmg/k = -x_0 + 2fmg/k$$

Sin embargo, debido a la presencia del amortiguamiento, la amplitud del movimiento va disminuyendo continuamente. Por tanto, en la posición extrema izquierda, en el extremo del primer medio ciclo, la distancia del bloque a la posición central en que no hay esfuerzo alguno es $x_0 - 2(fmg/k)$.

Por la simetría del problema, si aplicamos el mismo razonamiento para el movimiento del bloque hacia la derecha con un desplazamiento inicial de $x_0 - 2(fmg/k)$ desde el centro hacia la izquierda, se puede concluir que el bloque llegará a la posición extrema derecha. La distancia desde esta posición hasta la posición central será $x_0 - 4(fmg/k)$.

De modo que en cada medio ciclo la amplitud de vibración ha disminuido en una cantidad $2(fmg/k)$. Finalmente el bloque quedará en reposo en una de sus posiciones extremas. Esto sucederá tan pronto como la amplitud sea menor que fmg/k, debido a que aquí la fuerza de fricción es suficientemente grande para balancear la fuerza ejercida por los resortes. Por esta razón el movimiento no es armónico simple; por el contrario, la forma de la curva desplazamiento-tiempo cambia cada medio ciclo.

Para determinar la frecuencia natural amortiguada del bloque, la ecuación de movimiento se escribe:

$$m\ddot{x} + k(x - fmg/k) = 0$$

Sea $x' = x - fmg/k$; entonces, puesto que fmg/k es una constante, $\ddot{x}' = \ddot{x}$ y la ecuación de movimiento se convierte en:

$$m\ddot{x}' + kx' = 0, \qquad \text{de donde} \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}\ \text{rad/seg}$$

Por consiguiente, queda claro que la frecuencia natural amortiguada del bloque es igual a la frecuencia natural sin amortiguamiento. Resumiendo, la frecuencia de vibración de un sistema no es afectada por un amortiguamiento constante.

38. Dos movimientos armónicos de igual amplitud pero de frecuencias ligeramente diferentes se imponen sobre un cuerpo vibrante. Analice el movimiento del cuerpo.

Sea $x_1 = A\cos\omega t,\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$. Entonces el movimiento del cuerpo es la superposición de dos vibraciones:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\omega t + A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$
$$= A[\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t]$$

Por trigonometría, $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\cdot\cos\frac{1}{2}(x - y)$. Entonces,

$$x = A[2\cos\tfrac{1}{2}(\omega t + \omega t + \Delta\omega\, t)\cdot\cos(\Delta\omega/2)t]$$
$$= [2A\cos(\Delta\omega/2)t]\cos(\omega + \Delta\omega/2)t$$

Se observa que la amplitud de x fluctúa entre cero y $2A$, de acuerdo con el término $2A\cos(\Delta\omega/2)t$, mientras que el movimiento general de x es una onda cosinusoidal de frecuencia angular igual a $(\omega + \Delta\omega/2)$. Este modelo especial de movimiento se conoce como *fenómeno de pulsación*. Siempre que la amplitud llegue al máximo se dice que hay una *pulsación*. La frecuencia de pulsación, determinada por dos amplitudes máximas consecutivas, es igual a:

$$f_b = \frac{\Delta\omega + \omega}{2} - \frac{\omega}{2} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\ \text{ciclos/seg}$$

y el período $T = 1/f_b = 2\pi/\Delta\omega$ seg.

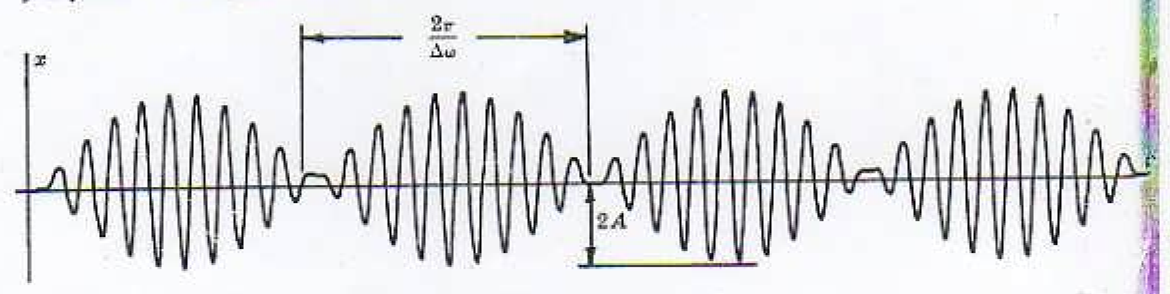
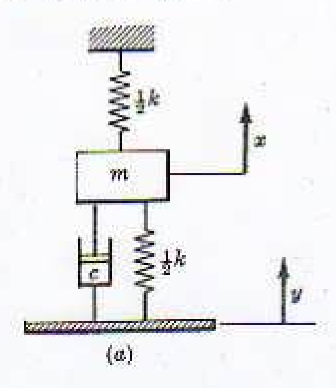


Fig. 1-43. Fenómeno de pulsación

39. Una excitación periódica, como la que se muestra en la figura 1-44(b) se aplica a la base del sistema masa-resorte-amortiguador. Determine el movimiento resultante de la masa m si $k = 40$ lb/pul, $m = 10$ lb-seg^2/pul y $c = 20$ lb-seg/pul.



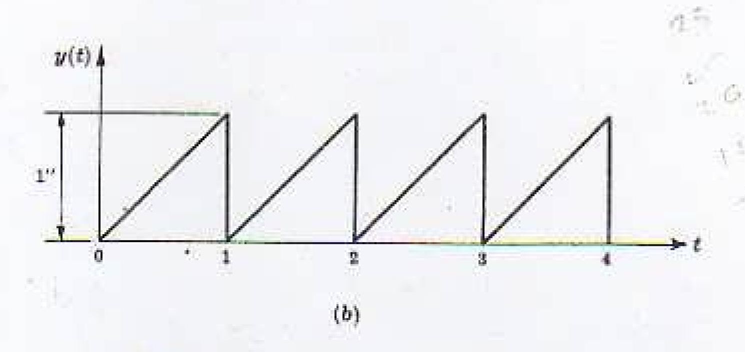


Fig. 1-44

El movimiento periódico en general puede representarse por series de Fourier, como la suma de dos funciones armónicas.

$$F(t) = \sum_{n=0} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$$

o en forma desarrollada,

$$F(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \operatorname{sen} \omega t + b_2 \operatorname{sen} 2\omega t + \cdots$$

donde $a_0 = (1/\tau)\int_0^\tau F(t)\, dt$, $\quad a_n = (2/\tau)\int_0^\tau F(t) \cos n\omega t\, dt$, $\quad b_n = (2/\tau)\int_0^\tau F(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt$, y $\tau = 2\pi/\omega$ es el período de $F(t)$.

Para este movimiento periódico de dientes de sierra, $F(t) = t$ y $\tau = 1$. Entonces, $y(t) = F(t) = t$ y

$$a_0 = (1/\tau)\int_0^\tau F(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \tfrac{1}{2}$$

$$a_n = (2/\tau)\int_0^\tau F(t) \cos n\omega t\, dt = 2\int_0^1 t \cos n\omega t\, dt = 0$$

$$b_n = (2/\tau)\int_0^\tau F(t) \operatorname{sen} n\omega t\, dt = 2\int_0^1 t \operatorname{sen} n\omega t\, dt = -1/n\pi$$

Por tanto, el desarrollo de las series de Fourier de $y(t)$ es:

$$y(t) = \tfrac{1}{2} - (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \operatorname{sen} n\omega t$$

Aplicando $\Sigma F = ma$ a este sistema dado,

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) \qquad \text{o} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

donde $\dot{y} = -\sum_{n=1}^{\infty} (\omega/\pi) \cos n\omega t$. Por tanto, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\left[-\sum_{n=1}^{\infty} (\omega/\pi) \cos n\omega t\right] + k\left[\tfrac{1}{2} - (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) \operatorname{sen} n\omega t\right]$$

$$= k/2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k}{\pi n} \operatorname{sen} n\omega t + \frac{c\omega}{\pi} \cos n\omega t\right]$$

Pero $A \operatorname{sen} n\omega t + B \cos n\omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(n\omega t + \phi)$ donde $\phi = \tan^{-1}(B/A)$. Entonces,

$$c\dot{y} + ky = k/2 - (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)\sqrt{k^2 + c^2 n^2 \omega^2} \operatorname{sen}(n\omega t + \phi)$$

donde $\phi = \tan^{-1}(c\omega/k)$; y puesto que $\omega_n^2 = k/m$, $\zeta = c/2m\omega_n$, entonces,

$$c\dot{y} + ky = k/2 - (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty} (k/n^2)\sqrt{1 + (2rn\zeta)^2} \operatorname{sen}(n\omega t + \phi)$$

Esta es la fuerza impresa y la respuesta del estado estacionario según discusiones anteriores es:

$$x_p = \frac{1}{2} - (1/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2)\sqrt{\frac{1+(2rn\zeta)^2}{(1-n^2r^2)^2+(2rn\zeta)^2}}\ \text{sen}\,(n\omega t-\psi)$$

donde $\psi = \tan^{-1}\left(\frac{2nr\zeta}{1-n^2r^2} - \phi\right)$.

Para este caso particular, $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{40/10} = 2$ rad/seg, $r = \omega/\omega_n = 1/2 = 0{,}5$, $\zeta = c/2m\omega_n$ = $20/(2\times 10\times 2) = 0{,}5$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de movimiento y simplificando obtenemos la respuesta del estado estacionario de la masa m:

$$x_p = 0{,}5 - 0{,}396\ \text{sen}\,(6{,}24t - 7{,}1^\circ) - 0{,}115\ \text{sen}\,(12{,}48t - 26{,}5^\circ) - 0{,}034\ \text{sen}\,(18{,}9t - 74{,}3^\circ)\ldots$$

TRASMISIBILIDAD

40. Un ventilador centrífugo pesa 100 lb y tiene un desbalanceamiento rotacional de 20 lb-pul. Si los amortiguadores utilizados tienen un factor de amortiguamiento $\zeta = 0{,}2$, determine los resortes que deben utilizarse de modo que sólo un 10% de la fuerza de desbalanceamiento se trasmita al piso. Determine también la magnitud de la fuerza trasmitida. El ventilador está girando a una velocidad constante de 1000 rpm.

La fuerza total trasmitida es la suma de las reacciones en los extremos fijos del resorte y del amortiguador.

$$F_t = kx + c\dot{x}$$

Bajo las condiciones de la vibración del estado estacionario discutidas anteriormente, la amplitud de la vibración

$$x_p = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\ \text{sen}\,(\omega t-\psi)$$

Por conveniencia, sea $x_p = A\ \text{sen}\,(\omega t - \psi)$: entonces, $\dot{x}_p = A\omega\cos(\omega t-\psi)$, y

$$F_t = kA\ \text{sen}\,(\omega t-\psi) + cA\omega\cos(\omega t-\psi)$$

Pero la fuerza del resorte es máxima cuando la velocidad es igual a cero (o sea que el desplazamiento es máximo) mientras que la fuerza de amortiguamiento es máxima cuando el desplazamiento es igual a cero (o sea que la velocidad es máxima). Puesto que la fuerza del resorte está en ángulo recto con la fuerza de amortiguamiento, la fuerza resultante máxima que se trasmite es $A\sqrt{k^2+(c\omega)^2}$. Entonces,

$$F_t = A\sqrt{k^2+(c\omega)^2}\cos(\omega t+\phi), \qquad \phi = \tan^{-1}(c\omega/k)$$

La trasmisibilidad TR, que es la razón de la máxima fuerza trasmitida a la máxima fuerza impresa, toma la forma

$F_t = TR\,F_0$

$$TR = \frac{A\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{F_0}\cos(\omega t+\phi)$$

Pero $x = x_p$ para la vibración del estado estacionario; por tanto,

$$TR = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = \frac{F_t}{F_0} \quad \text{o} \quad 0{,}1 = \frac{\sqrt{1+0{,}16r^2}}{\sqrt{1+r^4-2r^2+0{,}16r^2}}$$

donde $r = \omega/\omega_n$, $\zeta = c/2m\omega_n$, y TR = 0,1. Entonces,

$$\frac{1+0{,}16r^2}{r^4-1{,}84r^2+1} = 0{,}01 \quad \text{o} \quad r^4 - 1{,}84r^2 - 16r - 99 = 0$$

que nos da $r = 3{,}7$. Entonces, $\omega_n = \omega/r = 105/3{,}7 = 28{,}4$ rad/seg y

$$k = m\omega_n^2 = (100)(28{,}4)(28{,}4)/(32{,}2)(12) = 210\ \text{lb/pul}$$

Amplitud de la fuerza trasmitida: $F_t = (0{,}1)(me\omega^2) = \frac{(0{,}1)(20)(105)^2}{(32{,}2)(12)} = 57$ lb.

41. Con el fin de eliminar el movimiento vibratorio en los instrumentos, los tableros de instrumentos se montan sobre aisladores, tales como en los aviones. Si el aislador, que tiene muy poco amortiguamiento, se deflecta $\frac{1}{8}$ pul bajo un peso de 50 lb, encuentre el porcentaje de movimiento trasmitido al tablero de instrumentos, si la vibración del avión es de 2000 rpm.

$$\text{TR} = \frac{\sqrt{1+(2\zeta r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

donde $r = \omega/\omega_n$ y $\zeta = c/2m\omega_n$. Pero debido a que el amortiguamiento presente es pequeño, $c = 0$ y $\zeta = 0$.

Usando $\omega_n = \sqrt{k/m}$, donde $k = F/\delta_{est}$, tenemos:

$$\omega_n^2 = \frac{F}{m\delta_{st}} = \frac{50}{(50/386)(1/8)} = 3056 \text{ (rad/seg)}^2$$

o $f_n = 55{,}4/2\pi = 8{,}85$ ciclos/seg o 530 cpm. Entonces $r = f/f_n = 2000/530 = 3{,}77$ y

$$\text{TR} = \frac{1}{r^2-1} = \frac{1}{11{,}3-1} = 0{,}097$$

Por tanto, utilizando aisladores, únicamente se trasmite un 9,7% del movimiento vibratorio del avión al tablero de instrumentos.

INSTRUMENTOS SISMICOS

42. En la figura 1-45 se muestra un modelo general utilizado para la medición de vibraciones. La base se sujeta al cuerpo, el cual tiene una vibración desconocida A sen ωt. Estudie el movimiento del sistema y su aplicación en instrumentos vibratorios.

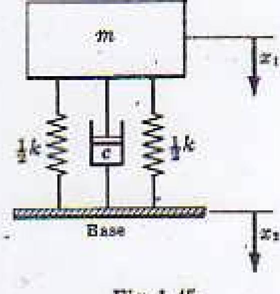


Fig. 1-45

Las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza del resorte, $k(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(x_1 - x_2)$ y la fuerza de amortiguamiento, $c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, suponiendo que x_1 es mayor que x_2. Utilizando $\Sigma F = ma$, la ecuación de movimiento es:

$$-k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = m\ddot{x}_1$$

Sea el movimiento relativo $x_1 - x_2 = x$; entonces,

$$x_1 = x + x_2 \qquad \text{y} \qquad \dot{x}_1 = \dot{x} + \dot{x}_2$$

y la ecuación de movimiento toma la forma:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}\right) + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \text{o} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = -m\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

Pero $x_2 = A$ sen ωt es la vibración del cuerpo libre; sustituyendo,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = mA\omega^2 \text{ sen } \omega t.$$

que es la ecuación diferencial de movimiento modelo para vibraciones forzadas, donde F_0 está remplazada por $mA\omega^2$. La respuesta del estado estacionario es, como antes,

$$x_p = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \text{ sen } (\omega t - \phi), \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$$

Haciendo $F_0 = \omega^2 mA$, $\omega_n^2 = k/m$, $\zeta = c/2m\omega_n$, y $r = \omega/\omega_n$, obtenemos:

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

Aquí ω_n es la frecuencia natural de la vibración recogida, mientras que ω es la frecuencia de la vibración desconocida.

Si ω_n es pequeña, (es decir que la constante de elasticidad es pequeña o la masa es grande, puesto que $\omega_n^2 = k/m$), la razón $r = \omega/\omega_n$ es muy grande. La expresión para x_p, dividiendo el numerador y el denominador por r^2, es:

$$x_p = \frac{A}{\sqrt{1/r^4 - (2-4\zeta)/r^2 + 1}} \text{ sen } (\omega t - \phi)$$

Puesto que r es grande, el denominador de la expresión anterior es aproximadamente igual a la unidad; entonces,

$$x_p = A \qquad \text{y} \qquad \phi = \tan^{-1} 2r\zeta/(1-r^2) = \tan^{-1}\frac{2\zeta/r}{(1/r^2)-1}$$

Por tanto, $\phi = \tan^{-1} 0 = 180°$, lo cual significa que los dos movimientos están defasados 180° o sea que $x_p = -A$.

El vibrâmetro, un tipo de instrumento sísmico, hace uso de este principio para medir la amplitud de una vibración. El movimiento relativo entre la masa y la base, se registra generalmente por medio de una pluma que comprime un cilindro rotatorio. Debido a que la frecuencia natural del vibrômetro se escoge de forma tal que tenga un valor pequeño, la amplitud de vibración es igual al movimiento relativo registrado con una diferencia de fase de 180º.

Otro tipo de instrumento sísmico, el acelerômetro, que se usa para medir la aceleración, utiliza el mismo principio. En lugar de utilizar resortes blandos, se utilizan resortes muy duros con el fin de obtener una frecuencia natural alta. En consecuencia, la razón de frecuencias r será muy pequeña. La expresión para x_p se convierte en:

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2}} = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-0)^2+0}} = Ar^2 = A\omega^2/\omega_n^2$$

Pero $A\omega^2$ es la amplitud de la aceleración del cuerpo que vibra con $x_1 = A$ sen ωt. Por tanto, el movimiento relativo es una medida de la aceleración.

43. Un recogedor de vibraciones simplificado en un sistema masa-resorte, como se muestra en la figura 1-46, se usa para medir la aceleración vertical de un tren, cuya frecuencia vertical es de 10 rad/seg. La masa pesa 3,86 lb y el módulo del resorte es 100 lb/pul. La amplitud del movimiento relativo medida por el instrumento, es de 0,05 pul. Encuentre la aceleración vertical máxima del tren. ¿Cuál es la amplitud de vibración del tren?

Del problema 42, la amplitud del movimiento relativo de la masa está dada por:

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2}}$$

Puesto que este sistema no tiene amortiguamiento,

$$x_p = \frac{Ar^2}{1-r^2} = \frac{A\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

donde $r = \omega/\omega_n$. Por tanto, la aceleración vertical máxima del tren es:

$$A\omega^2 = x_p(\omega_n^2 - \omega^2) = 0{,}05[(100)(386)/3{,}86 - 100] = 495 \text{ pies/seg}^2$$

La amplitud de vibración es:

$$A = x_p \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\omega^2} = 0{,}05\frac{(10.000 - 100)}{100} = 4{,}95 \text{ pul}$$

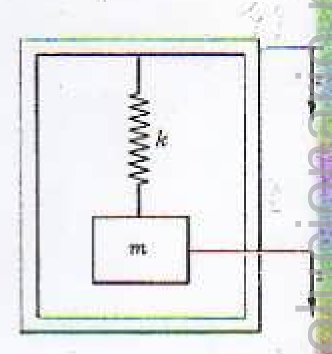


Fig. 1-46

44. Una masa que pesa 3,86 lb está suspendida en una caja por medio de un resorte vertical, cuya constante k es igual a 50 lb/pul, como se muestra en la figura 1-47. La caja se coloca sobre un banco sacudidor que produce una vibración $x = 0{,}09$ sen $3t$. Encuentre la amplitud absoluta de la masa.

La amplitud del movimiento relativo de la masa está dada por x_p, como en el problema 42.

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\zeta)^2}}$$

Como en la mayoría de los problemas de ingeniería, el amortiguamiento debido a la presencia del aire es despreciable; por tanto, en este caso el amortiguamiento no es efectivo. Entonces,

$$x_p = \frac{Ar^2}{1-r^2}$$

donde $r = \omega/\omega_n$. Pero $\omega_n^2 = k/m = 50(32{,}2)(12)/3{,}86 = 500$ (rad/seg)^2, $\omega = 3$ rad/seg y $\omega^2 = 9$ (rad/seg)^2; en consecuencia,

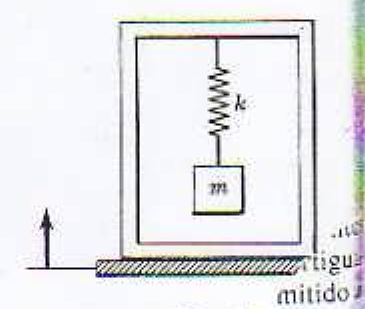


Fig. 1-47

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

$$x_p = \frac{Ar^2}{1-r^2} = \frac{A\omega^2}{\omega_n^2-\omega^2} = \frac{0{,}09(9)}{500-9} = 0{,}0016 \text{ pul}$$

La amplitud absoluta de la masa es $x_1 = x_p + A = 0{,}0016 + 0{,}09 = 0{,}0916$ pul.

45. Un vibrómetro, cuyo amortiguamiento es despreciable, se emplea para encontrar la magnitud de la vibración de la estructura de una máquina. El vibrómetro da una lectura del desplazamiento relativo de 0,002 pul. La frecuencia natural del vibrómetro es dada como 300 cpm y la máquina gira a 100 rpm. ¿Cuál será la magnitud del desplazamiento, velocidad y aceleración de la parte de la máquina que vibra?

Como se discutió anteriormente, la amplitud del movimiento relativo de la masa está dada por

$$x_p = \frac{Ar^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2r\zeta)^2}}$$

donde A = amplitud, $r = \omega/\omega_n$, ζ = factor de amortiguamiento = $c/2m\omega_n$. Como el amortiguamiento es muy poco, $c = 0$ y $\zeta = 0$; entonces,

$$x_p = \frac{Ar^2}{1-r^2}$$

donde $r = \omega/\omega_n = 100/300 = 0{,}333$. Por tanto, la magnitud del desplazamiento es:

$$A = x_p(1-r^2)/r^2 = 0{,}002(1-0{,}333^2)/(1/9) = 0{,}016 \text{ pul}$$

la magnitud de la velocidad es:

$$A\omega = x_p(1-r^2)\omega/r^2 = 0{,}016[100(2\pi/60)] = 0{,}17 \text{ pul/seg}$$

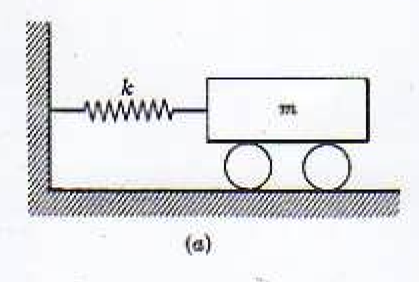
y la magnitud de la aceleración es:

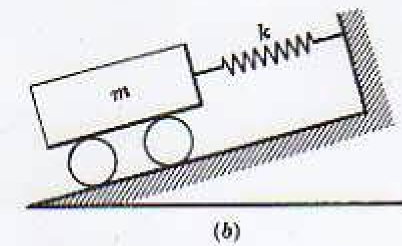
$$A\omega^2 = x_p(1-r^2)\omega_n^2 = 0{,}016\omega^2 = 0{,}016(108) = 1{,}74 \text{ pul/seg}^2$$

Problemas propuestos

46. Demuestre que la suma de dos movimientos armónicos de igual frecuencia pero con ángulos de fase diferentes, también es un movimiento armónico de la misma frecuencia, es decir, $A\cos\omega t + B\cos(\omega t+\phi) = C\cos(\omega t+\psi)$.

47. Demuestre que la ecuación de movimiento de los dos sistemas simples masa-resorte mostrados en las figuras 1-48(*a*) y 1-48(*b*) es la misma y es igual a la del sistema mostrado en la figura 1-48(*c*).





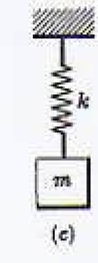


Fig. 1-48

48. Si la masa de la viga es pequeña comparada con la masa m, derive la expresión para la frecuencia de la masa m. Véase la figura 1-49.
Resp. $\omega_n = \sqrt{192EI/mL^3}$ rad/seg

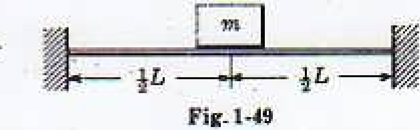


Fig. 1-49

Poniendo que el péndulo de un reloj sigue la teoría del péndulo simple, ¿cuál será su longitud si tiene un período de 1 segundo? *Resp.* $L = 9{,}83$ pul

50. Una chapa cuadrada homogénea de lado L pies y masa m está suspendida del punto medio de uno de sus lados, como se muestra en la figura 1-50. Encuentre su frecuencia de vibración. *Resp.* $\omega_n = \sqrt{6g/5L}$ rad/seg

51. Una varilla rígida de peso despreciable está restringida a oscilar en un plano vertical, como se muestra en la figura 1-51. Determine la frecuencia natural de la masa m. *Resp.* $\omega_n = \sqrt{k/9m}$ rad/seg

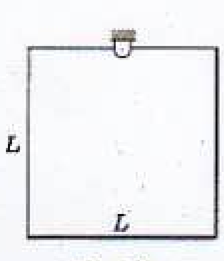


Fig. 1-50

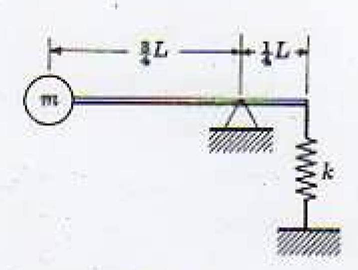


Fig. 1-51

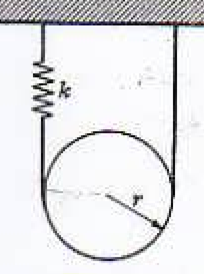


Fig. 1-52

52. Un cilindro homogéneo de masa m está suspendido por un resorte de constante k lb/pul y una cuerda inextensible, como se muestra en la figura 1-52. Encuentre la frecuencia natural de vibración del cilindro. *Resp.* $\omega_n = \sqrt{8k/3m}$ rad/seg

53. Resuelva el problema 5 por el método de la energía.

54. Un cilindro sólido homogéneo de masa m se sujeta por medio de un resorte de constante k lb/pul y reposa sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura 1-53. Si el cilindro rueda sin deslizar, demuestre que su frecuencia de oscilación es $\sqrt{2k/3m}$ rad/seg.



Fig. 1-53

55. Resuelva el problema 14 por el método de la energía.

56. Resuelva el problema 20 por el método de la energía.

57. Resuelva el problema 23 utilizando la ley del movimiento de Newton.

58. Una esfera homogénea de radio r y masa m puede rodar libremente sin deslizar sobre una superficie esférica de radio R. Si el movimiento de la esfera se restringe a un plano vertical, como se muestra en la figura 1-54, determine la frecuencia natural de oscilación de la esfera. *Resp.* $\omega_n = \sqrt{5g/7(R-r)}$ rad/seg

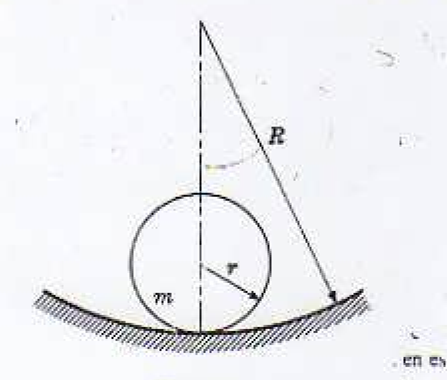


Fig. 1-54

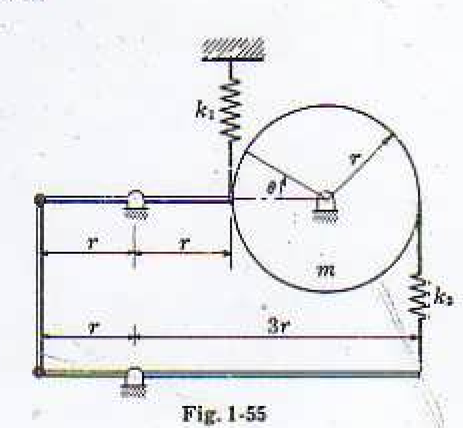


Fig. 1-55

59. Para ángulos de oscilación pequeños, encuentre la frecuencia de oscilación del sistema mostrado en la figura 1-55. *Resp.* $\omega_n = \sqrt{(2k_1 + 32k_2)/m}$ rad/seg

60. Resuelva el problema 24 por el método de la energía.

61. Use la ley del movimiento de Newton para resolver el problema 25.

62. Resuelva el problema 26 por el método de la energía.

63. Un péndulo simple está pivoteado en el punto O, como se muestra en la figura 1-56. Si la masa de la varilla es despreciable y las oscilaciones pequeñas, encuentre la frecuencia natural amortiguada del péndulo.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{kL_1^2 + mgL}{mL^2} - \left[\dfrac{cL_2^2}{2mL^2}\right]^2}$ rad/seg

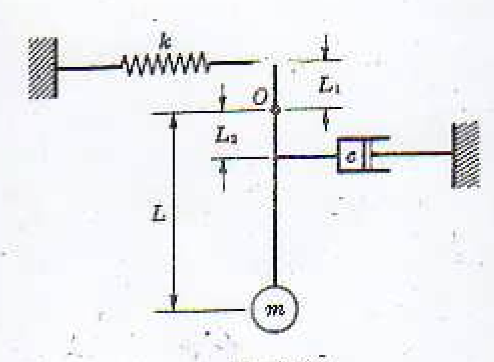


Fig. 1-56

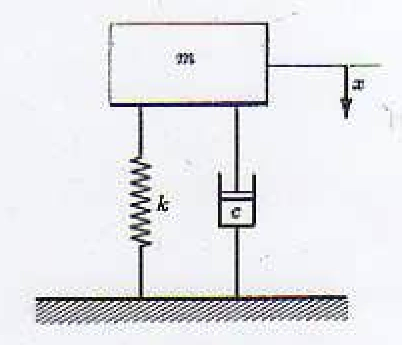


Fig. 1-57

64. Una masa de 50 lb reposa sobre un resorte de 25 lb/pul y un amortiguador de 0,75 lb-seg/pul, como se muestra en la figura 1-57. Si se aplica una velocidad de 4 pul/seg a la masa en su posición de reposo, ¿cuál será el desplazamiento al final del primer segundo? *Resp.* 0,0013 pul

65. Demuestre que la masa de un sistema sobreamortiguado nunca pasará por la posición de equilibrio estático,
(a) si se le da únicamente un desplazamiento inicial;
(b) si se le da únicamente una velocidad inicial.

66. Una viga simplemente apoyada tiene una masa concentrada M que actúa en su punto medio. Encuentre la frecuencia natural del sistema, si la masa de la viga es m.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{48EI}{(M + 0{,}486m)L^3}}$ rad/seg

67. Determine la frecuencia natural de vibración de una masa M sujeta al extremo de una viga en voladizo que tiene una longitud L y una masa m, cuando la masa de la viga no es despreciable.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{3EI}{L^3(M + 0{,}236m)}}$ rad/seg

68. La figura 1-58 muestra un bloque rectangular de masa m, que reposa sobre una superficie semi-cilíndrica. Si el bloque se inclina ligeramente en un extremo, encuentre su frecuencia de oscilación.

Resp. $\omega_n = 3{,}47\sqrt{\dfrac{(r - d/2)g}{4d^2 + L^2}}$ rad/seg

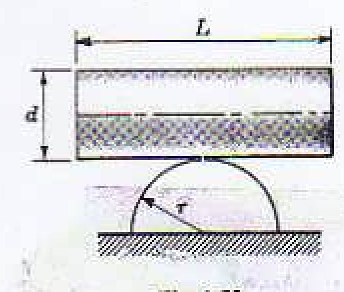


Fig. 1-58

69. Un bloque de masa m está soportado por un resorte de constante k, el cual a su vez está montado sobre una base de peso despreciable que tiene un movimiento armónico A_0 sen ωt, hacia arriba y hacia abajo, como se muestra en la figura 1-59. Determine el movimiento del bloque.

Resp. $x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t + \dfrac{A_0 \operatorname{sen} \omega t}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

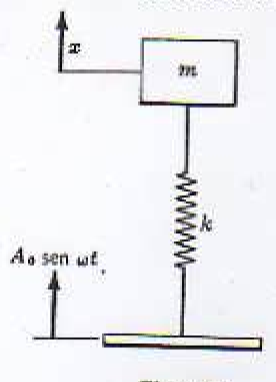


Fig. 1-59

Fig. 1-60

70. Si el sistema mostrado en la figura 1-60 se suelta desde una altura h sobre una superficie dura, ¿cuál será el movimi resultante de la masa m?

Resp. $x = \dfrac{\sqrt{2gh}\,e^{-(c/2m)t}}{\omega_d}$ sen $\omega_d t$

71. Un sistema simple masa-resorte de un solo grado de libertad está bajo un estado estacionario producido por una vi ción forzada. Demuestre que el principio de la superposición lineal es válido, es decir, que las soluciones de las con nentes de la función fuerza pueden sumarse para formar la solución de la función fuerza completa.

72. ¿Cuál será la respuesta del estado estacionario de la masa en la figura 1-61, si la función fuerza es:

$$f(t) = 10 \text{ sen } 0{,}5t + 10 \cos 1{,}5t + 20 \text{ sen } t + 20 \cos 2t$$

siendo $k = 10$ lb/pul y $m = 1$ lb-seg²/pul.

Resp. $x = 1{,}03$ sen $0{,}5t + 2{,}22$ sen $t + 1{,}29 \cos 1{,}5t + 3{,}33 \cos 2t$

73. En la figura 1-61 la deflexión estática del resorte debida a la masa m es 1,2 pul y la amplitud de vibración debida a excitación armónica $10 \cos 20t$ es 0,02 pul. ¿Cuál es el peso de la masa? *Resp.* 15,12 lb

74. El pistón mostrado en la figura 1-62 oscila con un movimiento armónico $x = A \cos \omega t$ dentro de un cilindro de masa el cual es soportado por un resorte de constante k. Si entre el pistón y la pared del cilindro hay un amortiguamiento coso de magnitud c, encuentre la amplitud del movimiento del cilindro y su diferencia de fase con el pistón.

Resp. $|x| = \dfrac{cA\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$, $\phi = \tan^{-1} \dfrac{(k - m\omega^2)}{c\omega}$

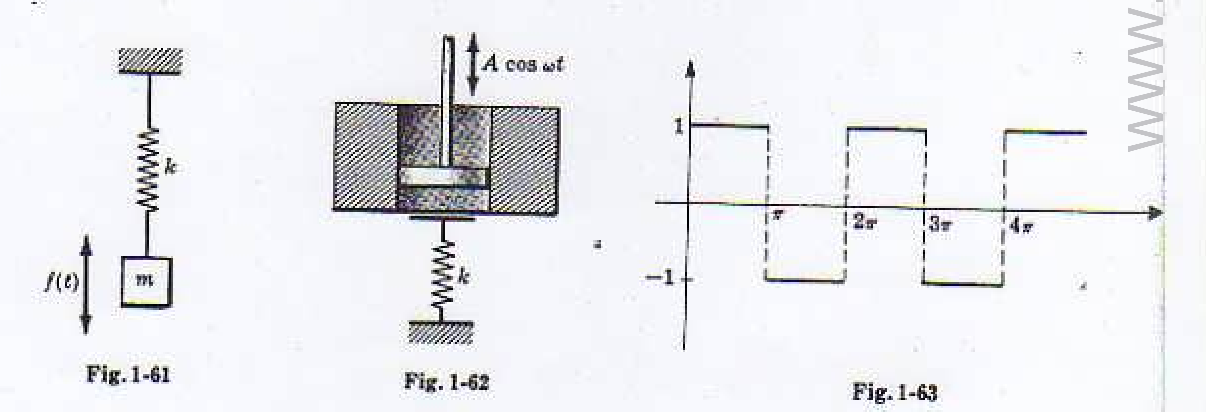


Fig. 1-61 Fig. 1-62 Fig. 1-63

75. Encuentre los cuatro primeros términos de la representación en series de Fourier de la onda cuadrada o función quebrad que se muestra en la figura 1-63.

Resp. $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\text{sen } t + \dfrac{1}{3} \text{ sen } 3t + \dfrac{1}{5} \text{ sen } 5t + \dfrac{1}{7} \text{ sen } 7t + \cdots\right)$

www.elsolucionario.net

76. Encuentre los cuatro primeros términos de la representación en series de Fourier de la onda triangular que se muestra en la figura 1-64.
Resp. $f(t) = -\frac{8}{\pi^2}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \frac{1}{7^2}\cos 7t + \cdots\right)$

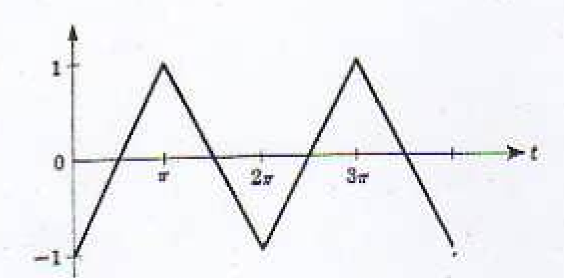


Fig. 1-64

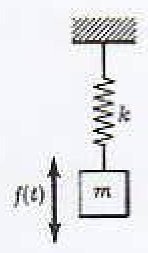


Fig. 1-65

77. Una excitación periódica, como la que se dio en el problema 75, está actuando sobre un sistema simple masa-resorte que vibra, como se muestra en la figura 1-65. Determine la vibración del estado estacionario del sistema, si la magnitud de k es 20, m vale 5 y ω vale 1. *Resp.* x_p = 1,69 sen t — 0,34 sen $3t$ + 0,048 sen $5t$ — . . .

78. Un motor pesa 200 lb y está girando a una velocidad constante de 1800 rpm. Si la trasmisibilidad de la fuerza entre el motor y el piso es 0,1 ó 10%, ¿cuál será la constante elástica de la armadura del motor? *Resp.* k = 1700 lb/pul

79. Si un automóvil que pesa 2000 lb viaja a una velocidad de 60 millas/hora por una carretera escabrosa cuya superficie varía sinusoidalmente con un período igual a 16 pies y una amplitud de $\frac{1}{2}$ pie, determine la razón de amplitudes del automóvil, cuando está cargado y cuando está vacío. El automóvil pesa 500 lb cuando está vacío, y el factor de amortiguamiento ζ es 0,5 cuando está cargado. *Resp.* Razón de amplitudes = 0,68

80. Un vibrómetro que tiene una frecuencia natural de 31,4 rad/seg se emplea para medir la amplitud de vibración de una parte de una máquina. Si el vibrómetro da una lectura de 0,06 pul, ¿cuál es la amplitud de vibración de la parte de la máquina considerada? *Resp.* 0,045 pul

Capítulo

Dos grados de libertad

INTRODUCCION

Los sistemas que necesitan dos coordenadas independientes para determinar su posición se ll sistemas de dos grados de libertad.

(*a*) En el sistema masa-resorte que se muestra en la figura 2-1, si las masas m_1 y m_2 se restı a moverse verticalmente, se necesita por lo menos una coordenada $x(t)$ para definir la loc ción de cada una de las masas en un instante cualquiera. Así, el sistema necesita en tot coordenadas para determinar su posición; este es un sistema de dos grados de libertad.

(*b*) Si la masa m, soportada por dos resortes iguales, como se muestra en la figura 2-2, se res a moverse en un plano vertical, se necesitan dos coordenadas para determinar la configur del sistema. Una de estas coordenadas será un desplazamiento rectilíneo, o sea el desplazam de la masa, $x(t)$. La otra coordenada será el desplazamiento angular, $\theta(t)$, que tiene cu con la rotación de la masa. Estas dos coordenadas son independientes la una de la otra; en secuencia, este sistema es de dos grados de libertad.

(*c*) Para el péndulo doble mostrado en la figura 2-3, es claro que se necesitan dos coordenadas especificar la posición de las masas m_1 y m_2 en un instante cualquiera y por tanto, el sis es de dos grados de libertad. x_1 y x_2, y_1 y y_2 o θ_1 y θ_2 son los posibles pares de coorder para este sistema.

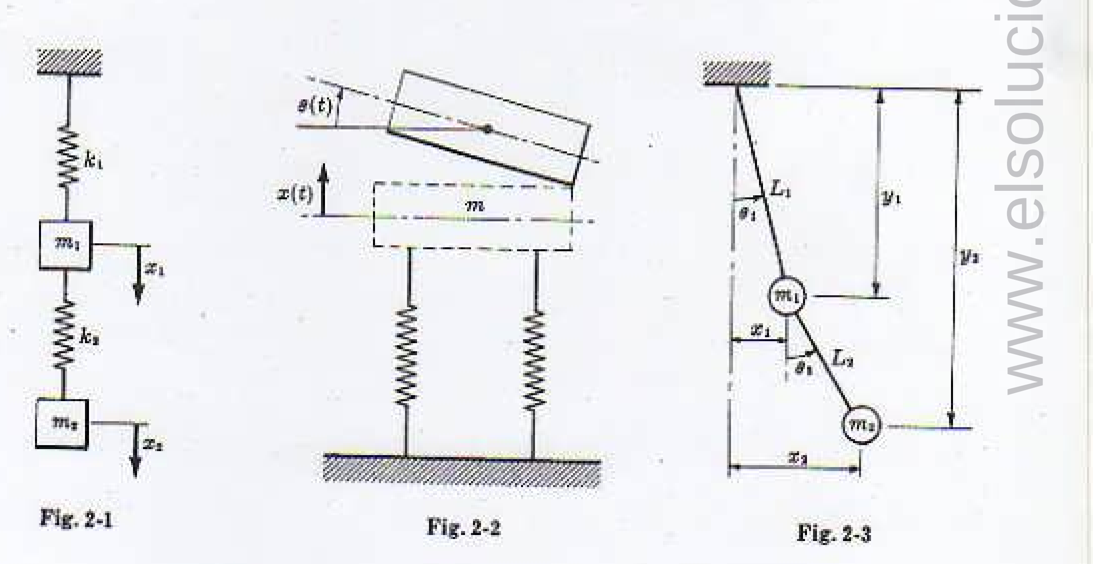


Fig. 2-1 Fig. 2-2 Fig. 2-3

COORDENADAS GENERALIZADAS

Como se expresó anteriormente, a veces es posible determinar la configuración de un sistema más de un par de coordenadas independientes o parámetros, tales como longitud, ángulo o algún c parámetro físico; cualquiera de estos pares de coordenadas se puede denominar *coordenadas ge ralizadas.*

MODOS NORMALES

Para un sistema de dos grados de libertad existen dos ecuaciones de movimiento, una para cada masa. Como resultado, para un sistema de dos grados de libertad, hay dos frecuencias naturales. Las frecuencias naturales se encuentran resolviendo la *ecuación de frecuencia* de un sistema sin amortiguamiento o la *ecuación característica* de un sistema amortiguado.

Cuando las masas de un sistema oscilan de tal forma que llegan simultáneamente a los desplazamientos máximos y pasan por sus puntos de equilibrio también simultáneamente, o sea que todas las partes móviles del sistema están oscilando en fase con una frecuencia, tal estado de movimiento se llama *modo normal* o *modo principal de vibración*.

COORDENADAS PRINCIPALES

Siempre es posible encontrar un par particular de coordenadas, tal que cada ecuación de movimiento contenga únicamente una cantidad desconocida. Entonces las ecuaciones de movimiento se pueden resolver independientemente una de la otra. A este par particular de coordenadas se le denomina *coordenadas principales*.

COORDENADAS DE ACOPLAMIENTO

Este es un concepto de acción de acoplamiento, donde una vibración en una parte del sistema induce otra vibración en otra parte del mismo sistema, debido a la fuerza trasmitida a través del resorte o del amortiguador de acoplamiento. En otras palabras, el desplazamiento de una masa será percibido por otra masa del mismo sistema, puesto que están acopladas. Hay dos tipos de acoplamiento: el *acoplamiento estático* debido al desplazamiento estático y el *acoplamiento dinámico* debido a las fuerzas de inercia.

ECUACIONES DE LAGRANGE

La ecuación de Lagrange en su forma fundamental para coordenadas generalizadas q_i, es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{q}_i} = Q_i$$

donde E.C. = energía cinética del sistema = $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
E.P. = energía potencial del sistema = $\frac{1}{2}kx^2$
E.D. = energía de disipación del sistema = $\frac{1}{2}c\dot{x}^2$
Q_i = fuerza generalizada externa que actúa sobre el sistema.

Para un sistema conservativo la ecuación de Lagrange puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

donde L = E.C. — E.P. es denominado el lagrangiano.

El uso de la ecuación de Lagrange producirá, directamente, tantas ecuaciones de movimiento como grados de libertad tenga el sistema, cuando se conocen las expresiones básicas de energía del sistema.

ABSORBEDOR DE VIBRACIONES DINAMICAS

Un absorbedor de vibraciones dinámicas es sencillamente un sistema de un solo grado de libertad, generalmente de la forma de un sistema simple masa-resorte. Cuando este sistema se adiciona como sistema auxiliar a otro sistema de un solo grado de libertad, trasformará todo el sistema en uno de dos grados de libertad, con dos frecuencias naturales de vibración. Una de las frecuencias naturales está por encima de la frecuencia de excitación, mientras que la otra está por debajo, de tal suerte que la masa principal del sistema completo tendrá una amplitud de vibración muy pequeña en lugar de una amplitud muy grande, bajo la excitación dada. (Véanse los problemas 36 y 37.)

PRINCIPIO DE LA ORTOGONALIDAD

Los modos principales de vibración para sistemas que tienen dos o más grados de libertad, son ortogonales. Esto se conoce como el principio de la ortogonalidad. Esta importante propiedad de que los modos principales son vibraciones que ocurren a lo largo de líneas rectas mutuamente perpendiculares, es muy usada para el cálculo de frecuencias naturales. Aunque los modos principales para sistemas con más de tres grados de libertad pueden no ser literalmente perpendiculares, el principio de la ortogonalidad aún es válido.

El principio de la ortogonalidad para sistemas de dos grados de libertad puede escribirse como

$$m_1 A_1 A_2 + m_2 B_1 B_2 = 0$$

donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son las amplitudes de las dos coordenadas para el primero y segundo modo de vibración. (Véanse los problemas 41 y 42.)

SISTEMAS SEMI-DEFINIDOS

Algunas veces, cuando una de las raíces de la ecuación de frecuencia de un sistema vibrante es igual a cero, esto indica que una de las frecuencias naturales del sistema es igual a cero. Estos sistemas se conocen como sistemas semi-definidos. Físicamente esto significa, sencillamente, que el sistema se moverá como un cuerpo rígido, sin distorsión de los resortes ni de los amortiguadores que unen las diferentes partes del sistema. (Véanse los problemas 43, 44 y 45.)

Problemas resueltos

1. Determine la ecuación de movimiento y las frecuencias naturales del sistema masa-resorte de dos grados de libertad mostrado en la figura 2-4.

Empleando $\Sigma F = ma$, tenemos:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

Cambiando el orden, la ecuación se convierte en:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_2 + k_1)x_1 - k_2 x_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes

$$x_1 = A \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad x_2 = B \text{ sen } (\omega t + \psi)$$

donde A, B y ψ son constantes arbitrarias y ω es una de las frecuencias naturales del sistema. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$-m_1 A\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \psi) + (k_1 + k_2)A \text{ sen } (\omega t + \psi) - k_2 B \text{ sen } (\omega t + \psi) = 0$$
$$-m_2 B\omega^2 \text{ sen } (\omega t + \psi) + k_2 B \text{ sen } (\omega t + \psi) - k_2 A \text{ sen } (\omega t + \psi) = 0$$

Fig. 2-4

Simplificando sen $(\omega t + \psi)$, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2 B = 0$$
$$-k_2 A + (k_2 - m_2\omega^2)B = 0$$

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B. La solución $A = B = 0$ define, sencillamente, la condición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir que

$$\begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Como se supone que el movimiento periódico está compuesto de movimientos armónicos, tanto la función seno como la función coseno pueden utilizarse para representar el movimiento. La ecuación algebraica resultante en A y B será la misma.

El desarrollo del determinante nos da:

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right]\omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0$$

que es la ecuación de frecuencia del sistema. Resolviéndola tenemos:

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{2m_1} + \frac{k_2}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right]^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}$$

De modo que la solución general de las ecuaciones de movimiento se compone de dos movimientos armónicos de frecuencias ω_1 y ω_2; estas frecuencias son la frecuencia fundamental y el primer armónico, respectivamente.

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2)$$
$$x_2 = B_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2)$$

donde las A, las B y los ψ son constantes arbitrarias. Las razones de amplitud son:

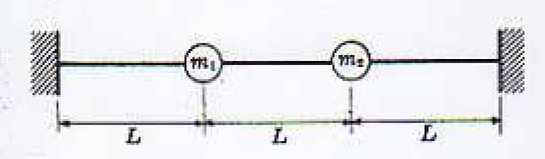
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1\omega_1^2} = \frac{k_2 - m_2\omega_1^2}{k_2} = \frac{1}{\lambda_1}$$
$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1\omega_2^2} = \frac{k_2 - m_2\omega_2^2}{k_2} = \frac{1}{\lambda_2}$$

Por tanto, las soluciones generales se convierten finalmente en:

$$x_1 = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2)$$
$$x_2 = \lambda_1 A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + \lambda_2 A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2)$$

y las cuatro constantes, A_1, A_2, ψ_1 y ψ_2 deben hallarse con base en las cuatro condiciones iniciales: $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$ y $\dot{x}_2(0)$.

2. Dos masas iguales están sujetas a una cuerda, la cual está sometida a una gran tensión, como se muestra en la figura 2-5. Determine las frecuencias naturales del sistema.



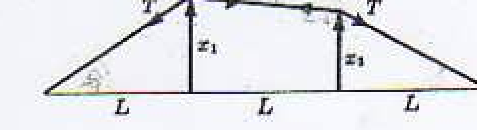


Fig. 2-5

Para oscilaciones pequeñas se puede suponer que la tensión en la cuerda permanece constante. Aplicando la ecuación del movimiento de Newton a la masa m_1, tenemos:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(x_1/L)T - [(x_1 - x_2)/L]T$$

o

$$m_1 \ddot{x}_1 + x_1 T/L + (x_1 - x_2)T/L = 0$$

Similarmente, para la masa m_2,

$$m_2 \ddot{x}_2 + x_2 T/L + (x_2 - x_1)T/L = 0$$

Como se expresó anteriormente, sea $x_1 = A\cos\omega t$ y $\ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos\omega t$
$x_2 = B\cos\omega t$, y $\ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos\omega t$.

Utilizando estos valores, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$-m_1\omega^2 A + TA/L + TA/L - TB/L = 0$$
$$-m_2\omega^2 B + TB/L + TB/L - TA/L = 0$$

Cambiando el orden obtenemos:

$$(2T/L - m_1\omega^2)A - (T/L)B = 0$$
$$-(T/L)A + (2T/L - m_2\omega^2)B = 0$$

La solución de estas dos ecuaciones algebraicas, diferente de la solución trivial, se encuentra igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B:

$$\begin{vmatrix} (2T/L - m_1\omega^2) & -(T/L) \\ -(T/L) & (2T/L - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

de donde la ecuación de frecuencia es:

$$\omega^4 - (4T/Lm)\omega^2 + 3T^2/L^2m^2 = 0$$

y

$$\omega^2 = \frac{4T/Lm \pm \sqrt{16T^2/L^2m^2 - 12T^2/L^2m^2}}{2} = 3T/Lm,\ T/Lm$$

Entonces $\omega_1 = \sqrt{T/Lm}$ rad/seg y $\omega_2 = 1.73\sqrt{T/Lm}$ rad/seg, donde T es la fuerza de tensión en la cuerda.

3. Las ecuaciones de movimiento del péndulo de ajuste que se muestra en la figura 2-6 son:

$$\ddot{x} + 1000x - 100\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + 1000\theta - 100x = 0$$

Si el péndulo se gira un radián y se suelta, encuentre el movimiento resultante del sistema.

Fig. 2-6

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes armónicos:

$$x = A\cos(\omega t + \psi), \qquad \theta = B\cos(\omega t + \psi)$$

donde A, B y ψ son constantes arbitrarias y ω es una de las frecuencias naturales del sistema.

Después de remplazar y simplificar, las ecuaciones de movimiento dan la ecuación de frecuencia del sistema como

$$\begin{vmatrix} (1000 - \omega^2) & -100 \\ -100 & (1000 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

o sea que $\omega^4 - 2000\omega^2 + 1000^2 - 10.000 = 0$; de donde, $\omega_1 = 30$ y $\omega_2 = 33.1$ rad/seg.

Las razones de amplitud están dadas por $A/B = 100/(1000 - \omega^2)$, es decir,

$$A_1/B_1 = 100/100 = 1, \qquad A_2/B_2 = 100/(-100) = -1$$

y las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$x = A_1\cos(30t + \psi_1) + A_2\cos(33.1t + \psi_2)$$
$$\theta = A_1\cos(30t + \psi_1) - A_2\cos(33.1t + \psi_2)$$

donde las cuatro incógnitas, A_1, A_2, ψ_1 y ψ_2 se deben calcular de las cuatro condiciones iniciales.

Los desplazamientos iniciales son $x(0) = 0$, $\theta(0) = 1$, o sea,

$$x(0) = A_1\cos\psi_1 + A_2\cos\psi_2 = 0$$
$$\theta(0) = A_1\cos\psi_1 - A_2\cos\psi_2 = 1$$

que nos dan: $A_1 = 1/(2\cos\psi_1)$ y $A_2 = 1/(-2\cos\psi_2)$.

Las velocidades iniciales son $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, o sea,

$$\dot{x}(0) = -\omega_1 A_1 \operatorname{sen}\psi_1 - \omega_2 A_2 \operatorname{sen}\psi_2 = 0$$
$$\dot{\theta}(0) = -\omega_1 A_1 \operatorname{sen}\psi_1 + \omega_2 A_2 \operatorname{sen}\psi_2 = 0$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Sumando estas dos ecuaciones obtenemos:

$$2A_1\omega_1 \operatorname{sen}\psi_1 = 0, \qquad 2A_2\omega_2 \operatorname{sen}\psi_2 = 0$$

Pero ω_1, ω_2, A_1 y A_2 no pueden ser cero en todo momento; por tanto, sen ψ_1 = sen $\psi_2 = 0$, o sea, $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Entonces $A_1 = \frac{1}{2}$ y $A_2 = -\frac{1}{2}$, y el movimiento resultante del sistema se expresa por las ecuaciones:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\cos 30t - \tfrac{1}{2}\cos 33.1t$$
$$\theta(t) = \tfrac{1}{2}\cos 30t + \tfrac{1}{2}\cos 33.1t$$

do a cero el de

en la cuerda,

Fig. 2-6

a del sistema com

4. El sistema masa-resorte de dos grados de libertad, que se muestra en la figura 2-7, está restringido a tener oscilaciones verticales, únicamente. Determinar la ecuación de frecuencia y las razones de amplitud del sistema.

Aplicando $\Sigma F = ma$ a las dos masas, obtenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1)$$

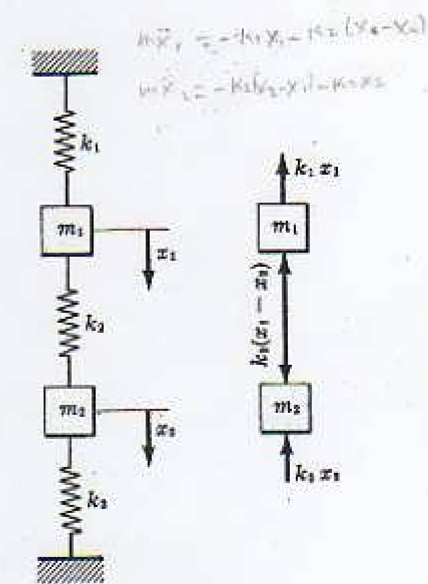


Fig. 2-7

Cambiando el orden, la ecuación se convierte en:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2x_1 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes:

$$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \qquad x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

donde A, B y ϕ son constantes arbitrarias y ω es una de las frecuencias naturales del sistema. Remplazando estas expresiones en las ecuaciones de movimiento y simplificando, tenemos:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = 0$$
$$-k_2A + (k_2 + k_3 - m_2\omega^2)B = 0$$

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B; la solución $A = B = 0$ sencillamente define la condición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación de frecuencia,

$$\omega^4 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2}\right]\omega^2 + \frac{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}{m_1m_2} = 0$$

Las razones de amplitud se encuentran de las ecuaciones algebraicas de los coeficientes de A y B:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1\omega_1^2} = \frac{k_2 + k_3 - m_2\omega_1^2}{k_2}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 - m_1\omega_2^2} = \frac{k_2 + k_3 - m_2\omega_2^2}{k_2}$$



5. Si la masa m_1 se desplaza 1 pul de su posición de equilibrio estático y se suelta, determine los desplazamientos resultantes $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de las masas mostradas en la figura 2-8.

Aplicando $\Sigma F = ma$ a las masas m_1 y m_2, obtenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

Suponga que el movimiento es periódico y está formado de componentes armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes:

$$x_1 = A\cos(\omega t + \phi), \qquad x_2 = B\cos(\omega t + \phi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(2k - m\omega^2)A - kB = 0$$
$$-kA + (2k - m\omega^2)B = 0$$

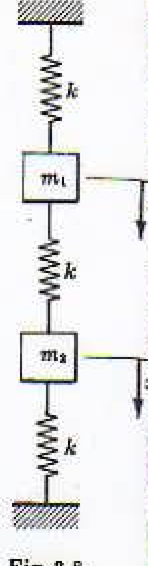


Fig. 2-8

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B. La solución $A = B = 0$ sencillamente define la condición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (2k - m\omega^2) & -k \\ -k & (2k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación de frecuencia

$$\omega^4 - (4k/m)\omega^2 + 3(k/m)^2 = 0$$

de donde $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ rad/seg.

Las razones de amplitud están dadas por:

$$A_1/B_1 = k/(2k - m\omega_1^2) = 1$$
$$A_2/B_2 = k/(2k - m\omega_2^2) = -1$$

Por tanto, los movimientos de las masas están expresados por:

$$x_1(t) = A_1\cos(\sqrt{k/m}\,t + \phi_1) + A_2\cos(\sqrt{3k/m}\,t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_1\cos(\sqrt{k/m}\,t + \phi_1) - A_2\cos(\sqrt{3k/m}\,t + \phi_2)$$

donde las cuatro constantes de integración deben evaluarse por medio de las cuatro condiciones iniciales: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$.

$$1 = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2 \quad (1)$$
$$0 = A_1\cos\phi_1 - A_2\cos\phi_2 \quad (2)$$
$$0 = -\omega_1 A_1 \operatorname{sen}\phi_1 - \omega_2 A_2 \operatorname{sen}\phi_2 \quad (3)$$
$$0 = -\omega_1 A_1 \operatorname{sen}\phi_1 + \omega_2 A_2 \operatorname{sen}\phi_2 \quad (4)$$

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) conjuntamente, se obtiene $A_1 = 1/(2\cos\phi_1)$ y de las ecuaciones (3) y (4) obtenemos $\operatorname{sen}\phi_1 = \operatorname{sen}\phi_2 = 0$, o sea, $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Por tanto, $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$. De modo que los movimientos de las masas son:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{k/m}\,t + \tfrac{1}{2}\sqrt{3k/m}\,t$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{2}\cos\sqrt{k/m}\,t - \tfrac{1}{2}\sqrt{3k/m}\,t$$

Para el modo principal de vibración las dos masas se mueven en el mismo sentido y con iguales amplitudes. En este caso el resorte de acoplamiento no sufre ningún esfuerzo. Para el segundo modo de vibración, las masas se mueven en sentidos opuestos pero con amplitudes iguales. El punto medio del resorte de acoplamiento permanece quieto debido a la simetría del sistema. Este punto estacionario se denomina nodo.

6. ¿Cuáles serán las condiciones iniciales apropiadas, tales que el sistema del problema 5 vibre, (a) en el primer modo principal y (b) en el segundo modo principal?

El movimiento general del sistema está dado por:

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$
$$x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Aplicando las condiciones iniciales $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$ y $\dot{x}_2(0)$, obtenemos:

$$x_1(0) = A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2$$
$$\dot{x}_1(0) = -A_1\omega_1\operatorname{sen}\phi_1 - A_2\omega_2\operatorname{sen}\phi_2$$
$$x_2(0) = A_1\cos\phi_1 - A_2\cos\phi_2$$
$$\dot{x}_2(0) = -A_1\omega_1\operatorname{sen}\phi_1 + A_2\omega_2\operatorname{sen}\phi_2$$

Y resolviendo estas ecuaciones hallamos que,

$$A_1 = \frac{-x_1(0) - x_2(0)}{-2\cos\phi_1} = \frac{\dot{x}_2(0) + \dot{x}_1(0)}{-2\omega_1\operatorname{sen}\phi_1}, \qquad A_2 = \frac{x_2(0) - x_1(0)}{-2\cos\phi_2} = \frac{\dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{-2\omega_2\operatorname{sen}\phi_2}$$

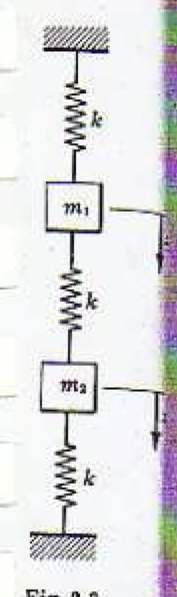


Fig. 2-8

(*a*) Para el primer modo principal de vibración, $A_2 = 0$ y por tanto,

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1), \qquad x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

lo cual requiere que $x_1(0) = x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$.

(*b*) Para el segundo modo principal de vibración, $A_1 = 0$ y, por tanto,

$$x_1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2), \qquad x_2(t) = -A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

lo cual requiere que $x_1(0) = -x_2(0)$ y $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$.

7. Dos varillas delgadas de sección uniforme que pesan 5 lb/pie cada una, están suspendidas de sus extremos superiores y se unen por medio de un resorte de rigidez 5 lb/pul, como se muestra en la figura 2-9. El sistema se desplaza ligeramente y se deja en libertad. ¿Cuáles son las frecuencias naturales de oscilación?

Tomando momentos con respecto a los puntos de suspensión M y N, tenemos:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g(36 \operatorname{sen} \theta_1) - (36)^2(\theta_1 - \theta_2)k$$
$$J_2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g(18 \operatorname{sen} \theta_2) - (36)^2(\theta_2 - \theta_1)k$$

donde J_1 y J_2 son los momentos de inercia de las dos varillas con respecto a M y N. Para oscilaciones pequeñas, sen $\theta \doteq \theta$. Haciendo $J_1 = \frac{1}{3} m_1 L_1^2 = 134$ y $J_2 = \frac{1}{3} m_2 L_2^2 = 16{,}8$, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\ddot{\theta}_1 - 56{,}4\theta_1 - 48{,}4\theta_2 = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + 401{,}1\theta_2 - 385\theta_1 = 0$$

Sea $\theta_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$, $\quad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$
$\quad\;\; \theta_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$, $\quad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(56{,}4 - \omega^2)A - 48{,}4B = 0$$
$$-385A + (401{,}1 - \omega^2)B = 0$$

y la ecuación de frecuencia, obtenida al igualar a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es:

$$\omega^4 - 457{,}5\omega^2 + 2000 = 0$$

de donde $\omega_1 = 1{,}95$ y $\omega_2 = 21{,}3$ rad/seg.

Fig. 2-9

8. Encuentre las frecuencias naturales de oscilación del péndulo doble, que se muestra en la figura 2-10, donde $m_1 = m_2 = m$ y $L_1 = L_2 = L$.

Tomando momentos con respecto a la masa m_1 y al punto pivotado O, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 = -m_2 g L_2 \operatorname{sen} \theta_2 - m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1$$
$$m_1 L_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g L_1 \theta_1 - m_2 g L_1 \theta_1 - m_2(L_1 \ddot{\theta}_1 + L_2 \ddot{\theta}_2)L_1$$

Para ángulos de oscilación pequeños, sen $\theta \doteq \theta$, y las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\ddot{\theta}_1 + (g/L)\theta_1 + \ddot{\theta}_2/2 = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + (g/L)\theta_2 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes armónicos:

$$\theta_1 = A \cos(\omega t + \psi) \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = B \cos(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(g/L - \omega^2)A - (\omega^2/2)B = 0$$
$$-\omega^2 A + (g/L - \omega^2)B = 0$$



Fig. 2-10

y la ecuación de frecuencia, que se encuentra igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es:

$$\omega^4 - (4g/L)\omega^2 + 2g^2/L^2 = 0$$

de donde $\omega_1 = 0{,}75\sqrt{g/L}$ y $\omega_2 = 1{,}86\sqrt{g/L}$ rad/seg.

9. Deduzca la ecuación de frecuencia del sistema que se muestra en la figura 2-11. Suponga que la cuerda que pasa sobre el cilindro no desliza.

Empleando la ecuación de fuerzas $\Sigma F = ma$ para la masa m_1 y la ecuación de momento torsional para el cilindro de masa m_2, obtenemos:

$$m_1\ddot{x} = -k_1(x - r\theta)$$
$$J_0\ddot{\theta} = -k_2r^2\theta - k_1(r\theta - x)r$$

donde $J_0 = \frac{1}{2}m_2r^2$ es el momento de inercia del cilindro de radio r. Cambiando el orden, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$m_1\ddot{x} + k_1x - k_1r\theta = 0$$
$$J_0\ddot{\theta} + (k_2r^2 + k_1r^2)\theta - k_1xr = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x} = -\omega^2A\,\text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$\theta = B\,\text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2B\,\text{sen}\,(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento tenemos:

$$(k_1 - m_1\omega^2)A - k_1rB = 0$$
$$-k_1rA + (k_2r^2 + k_1r^2 - J_0\omega^2)B = 0$$

La ecuación de frecuencia, que se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es:

$$\omega^4 - \left[\frac{2(k_1 + k_2)}{m_2} + \frac{k_1}{m_1}\right]\omega^2 + \frac{2k_1k_2}{m_1m_2} = 0$$

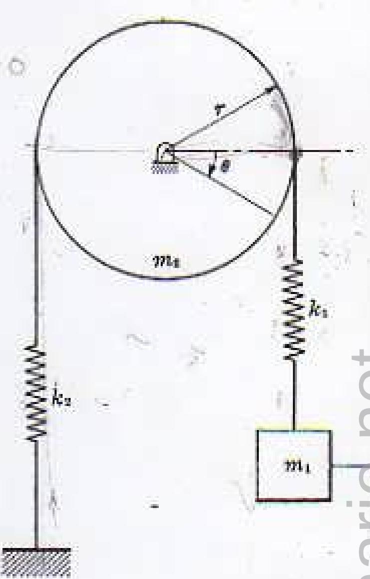


Fig. 2-11

10. Dos péndulos simples están unidos por un resorte, como se muestra en la figura 2-12. Determine la frecuencia natural de cada péndulo.

Tomando momentos alrededor de los puntos articulados M y N, tenemos:

$$mL^2\ddot{\theta}_1 = -mgL\theta_1 - ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$
$$mL^2\ddot{\theta}_2 = -mgL\theta_2 - ka^2(\theta_2 - \theta_1)$$

Sea $\theta_1 = A\cos\omega t$ y $\theta_2 = B\cos\omega t$. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(-\omega^2mL^2 + mgL + ka^2)A - ka^2B = 0$$
$$(-\omega^2mL^2 + mgL + ka^2)B - ka^2A = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} -\omega^2mL^2 + mgL + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & -\omega^2mL^2 + mgL + ka^2 \end{vmatrix} = 0$$

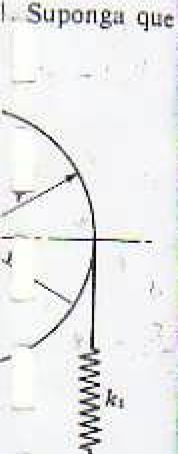
Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\omega^4 - 2(g/L + ka^2/mL^2)\omega^2 + (g^2/L^2 + 2ka^2g/mL^3) = 0$$

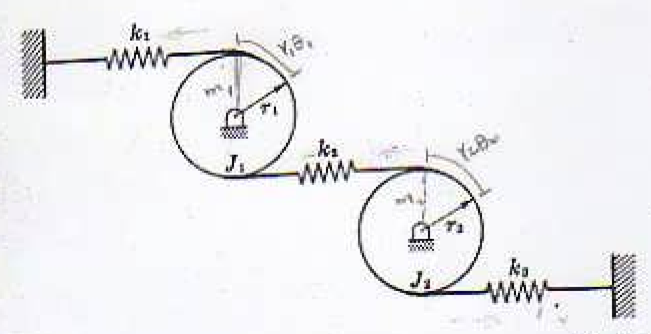
que nos da:

$$\omega_1 = \sqrt{g/L} \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{g/L + 2ka^2/mL^2} \ \text{rad/seg}$$

Fig. 2-12



11. Determine la ecuación de frecuencia del sistema, que se muestra en la figura 2-13, si $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$ y $J_1 = J_2 = J$.



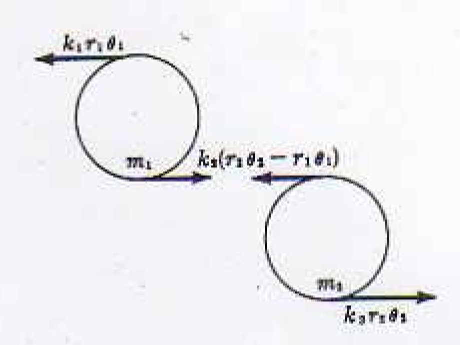


Fig. 2-13

Aplicando la ecuación de momento torsional $\Sigma T = J\ddot{\theta}$, tenemos:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k_1(r_1\theta_1)r_1 - k_2(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)r_1$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = -k_3(r_2\theta_2)r_2 - k_2(r_2\theta_2 - r_1\theta_1)r_2$$

donde $J_1 = J_2 = \frac{1}{2}mr^2$ son los momentos de inercia de los cilindros. Cambiando el orden obtenemos:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_1r_1^2 + k_2r_1^2)\theta_1 - k_2r_1r_2\theta_2 = 0$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + (k_3r_2^2 + k_2r_2^2)\theta_2 - k_2r_1r_2\theta_1 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea,

$$\theta_1 = A \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$\theta_2 = B \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } (\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(k_1r_1^2 + k_2r_1^2 - \omega^2 J_1)A - k_2r_1r_2B = 0$$
$$-(k_2r_1r_2)A + (k_3r_2^2 + k_2r_2^2 - \omega^2 J_2)B = 0$$

Haciendo $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m$, $r_1 = r_2 = r$ y $J_1 = J_2 = J$, las ecuaciones de movimiento se convierten en

$$(2kr^2 - \omega^2 J)A - kr^2B = 0$$
$$-kr^2A + (2kr^2 - \omega^2 J)B = 0$$

La solución de estas dos ecuaciones algebraicas, diferente de la solución trivial en la que A y B son iguales a cero, se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (2kr^2 - \omega^2 J) & -kr^2 \\ -kr^2 & (2kr^2 - \omega^2 J) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$\omega^4 - (8k/m)\omega^2 + 6k^2/m^2 = 0$$

de donde $\omega_1 = 0{,}92\sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = 2{,}68\sqrt{k/m}$ rad/seg.

NO ENTIENDO



12. Deduzca las ecuaciones de movimiento del sistema, mostrado en la figura 2-14, para ángulos de oscilación pequeños.

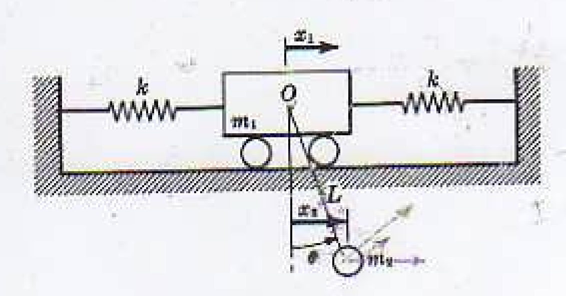


Fig. 2-14

Empleando $\Sigma F = ma$,

$$m_1\ddot{x}_1 = -m_2\ddot{x}_2 - 2kx_1$$

donde $x_2 = x_1 + L \text{ sen } \theta$ y L es la longitud del péndulo. Para ángulos de oscilación pequeños, $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + L \cos \theta\, \ddot{\theta}$. Por tanto la ecuación de movimiento se convierte en:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + 2kx_1 + m_2L\ddot{\theta} = 0$$

La segunda ecuación de movimiento se obtiene considerando los momentos que actúan alrededor del punto O:

$$-m_2\ddot{x}_1 L\cos\theta \;=\; (m_2 g - m_2\ddot{y})L\,\text{sen}\,\theta$$

donde $y = L\cos\theta$ y $\ddot{y} = -L\,\text{sen}\,\theta\,\ddot{\theta}$. Suponiendo que los ángulos de oscilación son pequeños, sen $\theta \doteq \theta$ y cos $\theta \doteq 1$ y la segunda ecuación de movimiento se convierte en:

$$\ddot{\theta} + (g/L)\theta + \ddot{x}_1/L \;=\; 0$$

Nota. Si m_1 se mantiene estacionario, el sistema se reduce a un sistema de un solo grado de libertad que tiene péndulo simple en movimiento, es decir, $\ddot{\theta} + (g/L)\theta \;=\; 0$.

13. Un péndulo físico doble de masas m_1 y m_2 se muestra en la figura 2-15. a_1 y a_2 son las distancias desde los centros de masa hasta los puntos pivotados correspondientes. Deduzca las ecuaciones de movimiento.

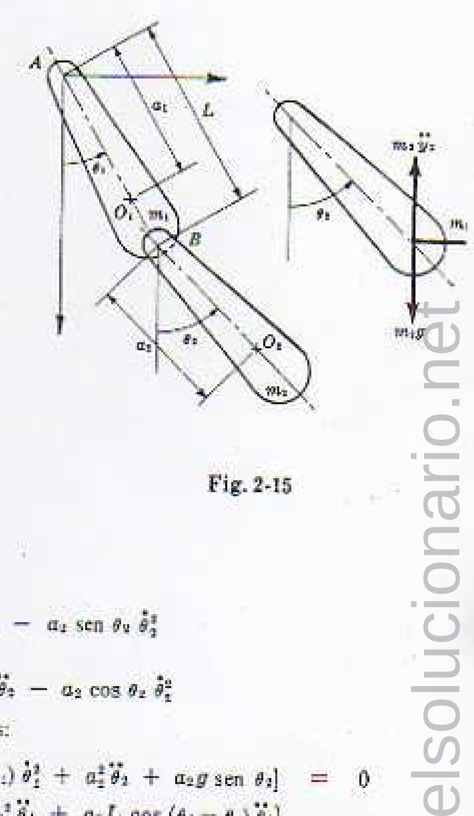


Fig. 2-15

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas de los centros de masa O_1 y O_2, y J_1 y J_2 los momentos de inercia de los péndulos con respecto al eje de rotación. Tomando momentos con respecto a los puntos B y A, tenemos:

$$J_2\ddot{\theta}_2 \;=\; -m_2 g a_2\,\text{sen}\,\theta_2 - m_2\ddot{x}_2 a_2\cos\theta_2 + (m_2 a_2\,\text{sen}\,\theta_2)\ddot{y}_2$$
$$J_1\ddot{\theta}_1 \;=\; -m_1 g x_1 + m_1\ddot{y}_1 x_1 - m_1\ddot{x}_1 y_1 + m_2\ddot{y}_2 L\,\text{sen}\,\theta_1 - m_2\ddot{x}_2 y_2 - m_2\ddot{y}_2 x_2 - m_2 g L\,\text{sen}\,\theta_1$$

donde
$$x_1 = a_1\,\text{sen}\,\theta_1$$
$$x_2 = L\,\text{sen}\,\theta_1 + a_2\,\text{sen}\,\theta_2$$
$$y_1 = a\cos\theta_1$$
$$y_2 = L\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2$$

Por tanto,
$$\ddot{x}_1 = a_1\cos\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - a_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1^2$$
$$\ddot{x}_2 = L\cos\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - L\,\text{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 + a_2\cos\theta_2\,\ddot{\theta}_2 - a_2\,\text{sen}\,\theta_2\,\dot{\theta}_2^2$$
$$\ddot{y}_1 = -a_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - a_1\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1^2$$
$$\ddot{y}_2 = -L\,\text{sen}\,\theta_1\,\ddot{\theta}_1 - L\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1^2 - a_2\,\text{sen}\,\theta_2\,\ddot{\theta}_2 - a_2\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2^2$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de momentos, obtenemos:

$$J_2\ddot{\theta}_2 + m_2[a_2 L\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_1 + a_2 L\,\text{sen}\,(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + a_2^2\ddot{\theta}_2 + a_2 g\,\text{sen}\,\theta_2] \;=\; 0$$
$$J_1\ddot{\theta}_1 + m_1(a_1^2\ddot{\theta}_1 + a_1 g\,\text{sen}\,\theta_1) + m_2[L^2\ddot{\theta}_1 + a_2 L\cos(\theta_2-\theta_1)\ddot{\theta}_2] + m_2[a_2 L\,\text{sen}\,(\theta_1-\theta_2)\dot{\theta}_2^2 + gL\,\text{sen}\,\theta_1] \;=\; 0$$

Suponiendo que las oscilaciones son pequeñas (sen $\theta \doteq \theta$, cos $\theta \doteq 1$) y despreciando los términos de orden superior, ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$(J_2 + m_2 a_2^2)\ddot{\theta}_2 + m_2 g a_2\theta_2 + m_2 a_2 L\ddot{\theta}_1 \;=\; 0$$
$$(J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 L^2)\ddot{\theta}_1 + (m_1 g a_1 + m_2 g L)\theta_1 + m_2 a_2 L\ddot{\theta}_2 \;=\; 0$$

Haciendo m_2 igual a cero en la última expresión, se obtiene la ecuación de movimiento de un péndulo físico simple, como el que se estudió en el problema 13 del capítulo 1.

COORDENADAS PRINCIPALES NO COLO!!!

14. Para el sistema masa-resorte de dos grados de libertad, que se muestra en la figura 2-16, encuent las coordenadas principales. Suponga que $k = m = 1$.

Como se demostró en el problema 1, el movimiento general del sistema es:

$$x_1(t) \;=\; A_1\,\text{sen}\,(0{,}63t + \psi_1) + A_2\,\text{sen}\,(1{,}62t + \psi_2)$$
$$x_2(t) \;=\; 1{,}6A_1\,\text{sen}\,(0{,}63t + \psi_1) - 0{,}63A_2\,\text{sen}\,(1{,}62t + \psi_2)$$

donde $\lambda_1 = 1{,}6$ y $\lambda_2 = -0{,}63$.

Defina un nuevo par de coordenadas, y_1 y y_2, tal que

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen}(0.63t + \psi_1)$$
$$y_2 = A_2 \operatorname{sen}(1.62t + \psi_2)$$

Puesto que y_1 y y_2 son movimientos armónicos, sus correspondientes ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\ddot{y}_1 + 0.4y_1 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + 2.62y_2 = 0$$

Este par de ecuaciones de movimiento representa un sistema vibratorio de dos grados de libertad, con dos frecuencias naturales: $\omega_1 = 0{,}63$ y $\omega_2 = 1{,}62$ rad/seg. Puesto que en las ecuaciones de movimiento no hay términos de acoplamiento estático o dinámico, y_1 y y_2 son coordenadas principales. Ahora,

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = 1{,}6y_1 - 0{,}63y_2$$

En consecuencia,

$$y_1 = 0{,}28x_1 + 0{,}45x_2$$
$$y_2 = 0{,}72x_1 - 0{,}45x_2$$

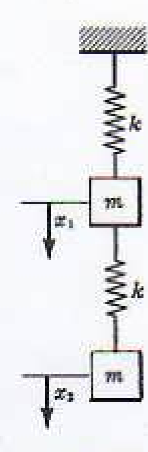


Fig. 2-16

15. Determine las coordenadas principales del sistema que se muestra en la figura 2-17.

Como se demostró en el problema 4, el movimiento general del sistema es:

$$x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3k/m}\,t + \psi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \psi_1) - A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3k/m}\,t + \psi_2)$$

Defina un nuevo par de coordenadas y_1 y y_2, tal que,

$$y_1 = A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \psi_1)$$
$$y_2 = A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3k/m}\,t + \psi_2)$$

Puesto que y_1 y y_2 son movimientos armónicos, sus correspondientes ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\ddot{y}_1 + (k/m)y_1 = 0$$
$$\ddot{y}_2 + (3k/m)y_2 = 0$$

Este par de ecuaciones de movimiento representa un sistema vibratorio de dos grados de libertad, con dos frecuencias naturales: $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ y $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ rad/seg. Puesto que en las ecuaciones de movimiento no aparecen términos de acoplamiento estático ni dinámico, y_1 y y_2 son coordenadas principales. Ahora,

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1 - y_2$$

En consecuencia,

$$y_1 = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

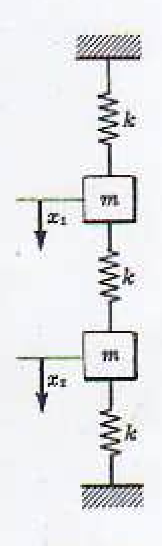


Fig. 2-17

COORDENADAS DE ACOPLAMIENTO

16. Un sistema vibrante de dos grados de libertad consta de una masa m y de dos resortes de rigidez k_1 y k_2, respectivamente, como se muestra en la figura 2-18. Estudie la acción de acoplamiento del sistema.

Como se muestra en la figura 2-18, se necesitan dos coordenadas independientes, $x(t)$ y $\theta(t)$, para determinar la configuración del sistema. Usando $\Sigma F = ma$, tenemos:

$$m\ddot{x} = -k_1(x - L_1\theta) - k_2(x + L_2\theta)$$
$$J\ddot{\theta} = k_1(x - L_1\theta)L_1 - k_2(x + L_2\theta)L_2$$

o

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_1L_1 - k_2L_2)\theta = 0$$
$$J\ddot{\theta} + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta - (k_1L_1 - k_2L_2)x = 0$$

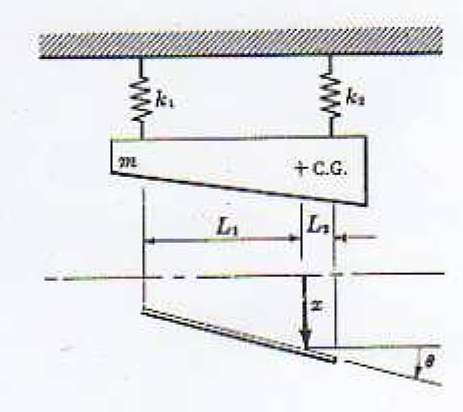


Fig. 2-18

las cuales serán independientes la una de la otra si el término de acoplamiento $(k_1L_1 - k_2L_2)$ es igual a cero, es decir $k_1L_1 = k_2L_2$. Si esto no sucede, el movimiento resultante de la masa constará de movimiento de traslación y de movimiento de rotación, cuando se le de al centro de gravedad del cuerpo un desplazamiento o se le aplique un momento torsional, como condición inicial. En otras palabras, la masa rotará en un plano vertical y tendrá también un movimiento vertical a menos que $k_1L_1 = k_2L_2$. Esto es lo que se conoce como acoplamiento estático o elástico.

Refiriéndonos a la figura 2-19, donde $y(t)$ y $\phi(t)$ se usan como coordenadas del sistema, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m\ddot{y} = -k_1(y - L_1\phi) - k_2(y + L_2\phi) - mL\ddot{\phi}$$
$$J\ddot{\phi} = k_1(y - L_1\phi)L_1 - k_2(y + L_2\phi)L_2 - m\ddot{y}L$$

o
$$m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y + mL\ddot{\phi} + (k_2L_2 - k_1L_1)\phi = 0$$
$$J\ddot{\phi} + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\phi + mL\ddot{y} + (k_2L_2 - k_1L_1)y = 0$$

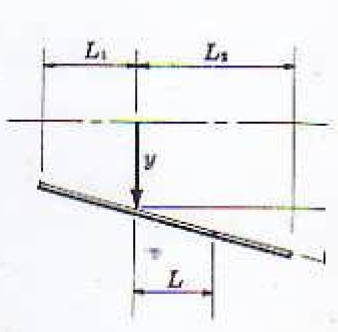


Fig. 2-19

Este par de ecuaciones de movimiento contiene términos de acoplamiento tanto estático como dinámico. Si $k_1L_1 = k_2L_2$, el sistema tiene únicamente acoplamiento dinámico o de inercia. En este caso, si la masa se mueve hacia arriba y hacia abajo en la dirección y, la fuerza de inercia $m\ddot{y}$, que actúa en el centro de gravedad de la masa, inducirá un movimiento en la dirección ϕ, en virtud de la acción del momento $m\ddot{y}L$. Por otra parte, un movimiento en la dirección ϕ creará, similarmente, un movimiento de la masa en la dirección y, debido a la fuerza $mL\ddot{\phi}$.

17. En la figura 2-20 se muestra una representación esquemática de un automóvil. Si el automóvil pesa 4000 lb y tiene un radio de giro de 4,5 pies alrededor del centro de gravedad, encuentre los modos principales de vibración del automóvil. k_1 vale 250 lb/pul y k_2 vale 270 lb/pul.

Un automóvil tiene más de dos grados de libertad. Con el fin de hallar la acción de acoplamiento vamos a considerar únicamente el movimiento en un plano vertical. Sean x y θ las coordenadas. Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m\ddot{x} = -k_1(x - L_1\theta) - k_2(x + L_2\theta)$$
$$J\ddot{\theta} = k_1(x - L_1\theta)L_1 - k_2(x + L_2\theta)L_2$$

donde $J = mk^2$ es el momento de inercia del automóvil. Cambiando el orden, tenemos:

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - (k_1L_1 - k_2L_2)\theta = 0$$
$$J\ddot{\theta} + (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta - (k_1L_1 - k_2L_2)x = 0$$

que contienen el término de acoplamiento estático $(k_1L_1 - k_2L_2)$. Remplazando k_1 y k_2 por sus respectivos valores y $J = mk^2$ en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$\ddot{x} + 50.12x + 532\theta = 0$$
$$\ddot{\theta} + 64.22\theta + 0.54x = 0$$

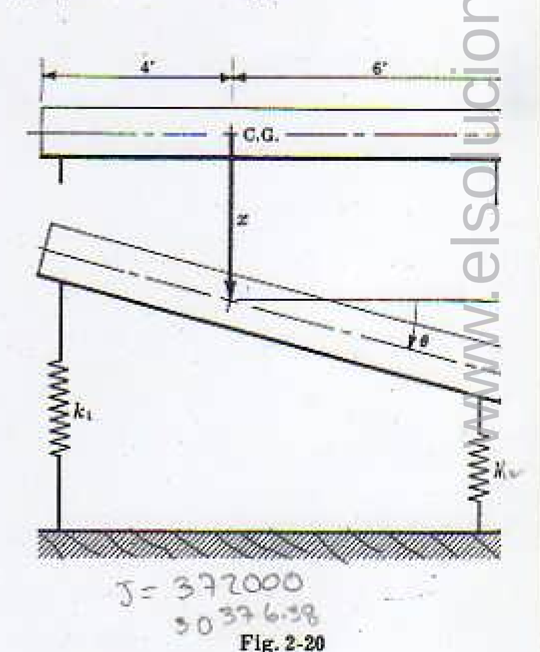


Fig. 2-20

Sea $x = A$ sen $(\omega t + \psi)$ y $\theta = B$ sen $(\omega t + \psi)$. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y simplificando,

$$(50.12 - \omega^2)A + 532B = 0$$
$$0.54A + (64.22 - \omega^2)B = 0$$

La ecuación de frecuencia, que se obtiene al igualar a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es:

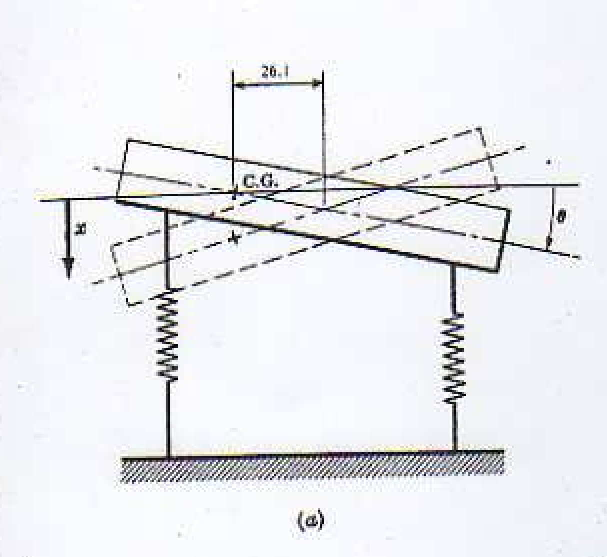
$$\omega^4 - 114.2\omega^2 + 2923 = 0$$

que nos da: $\omega_1 = 5,5$ y $\omega_2 = 8,9$ rad/seg.

Los modos principales de vibración se encuentran de las razones de amplitud:

$$A_1/B_1 = 532/(50{,}12 - 5{,}5^2) = 26{,}1$$
$$A_2/B_2 = 532/(50{,}12 - 8{,}9^2) = -18{,}6$$

como se muestra en las figuras 2-21(*a*) y 2-21(*b*).



(*a*) (*b*)

Fig. 2-21

18. Una varilla rígida, de peso despreciable, tiene dos masas iguales m, una en cada extremo y está unida a una viga en voladizo, la cual tiene una rigidez torsional K y una rigidez lineal k, como se muestra en la figura 2-22. ¿Cuáles son los términos de acoplamiento del sistema?

Suponga que el centro de gravedad de la varilla está a una distancia e del extremo de la viga. Utilizando $\Sigma F = ma$, la primera ecuación de movimiento es:

$$2m\ddot{x} = -kx - 2me\ddot{\theta}$$

donde kx es la fuerza restauradora debida al comportamiento elástico de la viga y $2me\ddot{\theta}$ es la fuerza de inercia debida a la excentricidad del centro de gravedad de la varilla.

La segunda ecuación de movimiento del sistema se encuentra empleando la ecuación de momentos $\Sigma M = J\ddot{\theta}$, o sea,

$$J\ddot{\theta} = -K\theta - 2m\ddot{x}e$$

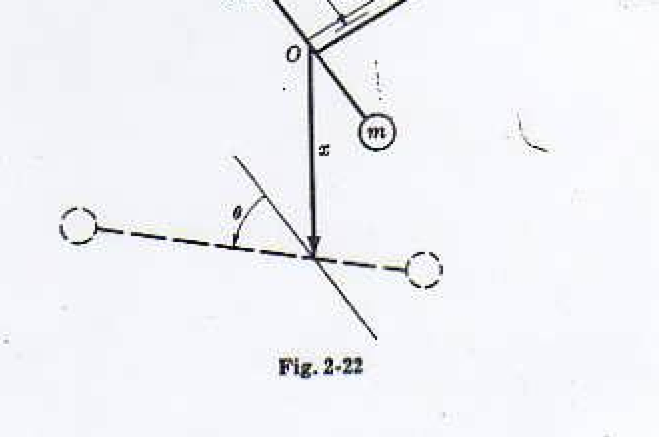


Fig. 2-22

donde J es el momento de inercia de la varilla con respecto al punto O, $K\theta$ es el momento restaurador de la viga, que se comporta como un eje, y $2m\ddot{x}e$ es el momento debido a la excentricidad del centro de gravedad de la varilla. Cambiando el orden, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\ddot{x} + (k/2m)x + e\ddot{\theta} = 0$$
$$\ddot{\theta} + (K/J)\theta + (2me/J)\ddot{x} = 0$$

en consecuencia $e\ddot{\theta}$ y $(2me/J)\ddot{x}$ son los términos de acoplamiento dinámico del sistema.

ECUACION DE LAGRANGE

19. Utilice la ecuación de Lagrange para deducir las ecuaciones de movimiento del péndulo acoplado que se muestra en la figura 2-23.

Fig. 2-23

Este problema se resolvió en el problema 10, empleando la ley del movimiento de Newton. Aquí resultará evidente que la ecuación de Lagrange es una forma más directa de resolver los problemas de vibraciones y es particularmente útil para sistemas que tienen expresiones de energía simples.

Para sistemas conservativos sin excitación, la ecuación de Lagrange puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} = 0$$

Para este sistema, sean θ_1 y θ_2 las coordenadas generalizadas. Las expresiones de energía son

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m_1 L^2 \dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 L^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$\text{E.P.} = m_1 gL(1-\cos\theta_1) + m_2 gL(1-\cos\theta_2) + \tfrac{1}{2}k(a\theta_2 - a\theta_1)^2$$

y $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_1} = m_1 L^2 \ddot{\theta}_1, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_1} = m_1 gL \operatorname{sen}\theta_1 - ka(a\theta_2 - a\theta_1)$$

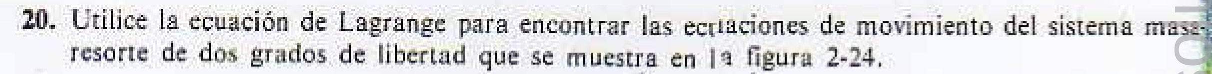
Por tanto, la primera ecuación de movimiento está dada por:

$$m_1 L^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 gL \operatorname{sen}\theta_1 - a^2 k(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Similarmente, $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_2} = m_2 L^2 \ddot{\theta}_2, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_2} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_2} = m_2 gL \operatorname{sen}\theta_2 + a^2 k(\theta_2 - \theta_1)$$

y la segunda ecuación de movimiento es:

$$m_2 L^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 gL \operatorname{sen}\theta_2 + ka^2(\theta_2 - \theta_1) = 0$$



20. Utilice la ecuación de Lagrange para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema masa-resorte de dos grados de libertad que se muestra en la figura 2-24.



Fig. 2-24

Las coordenadas generalizadas para este sistema son x_1 y x_2, como se muestra. La energía del sistema consta de energía cinética, debida al movimiento de las masas y de energía potencial, debida a la acción del resorte de acoplamiento, k.

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2)$$

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

La ecuación de Lagrange para un sistema conservativo es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} = 0$$

donde $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = -k(x_2 - x_1)$$

Entonces la primera ecuación de movimiento se convierte en:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

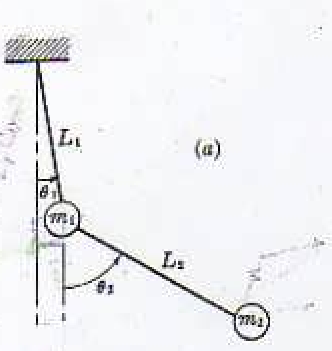
Similarmente, $$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1)$$

y la segunda ecuación de movimiento es:

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

21. En la figura 2-25 se muestra un péndulo doble de longitudes L_1 y L_2 y masas m_1 y m_2. Utilice la ecuación de Lagrange para deducir las ecuaciones de movimiento.





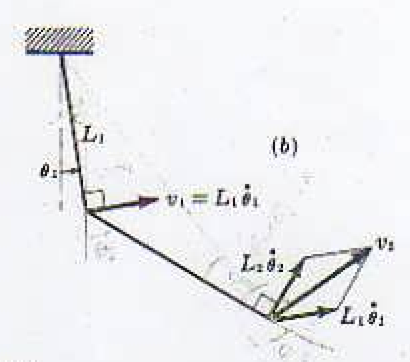


Fig. 2-25

La energía cinética del péndulo está dada por:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

donde $v_1^2 = (L_1\dot{\theta}_1)^2$ y $v_2^2 = (L_1\dot{\theta}_1)^2 + (L_2\dot{\theta}_2)^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$, son las velocidades de las masas m_1 y m_2, respectivamente, como se muestra en las figuras 2-25(*a*) y 2-25(*b*).

$$\text{E.P.} = m_1gL_1(1-\cos\theta_1) + m_2g[L_1(1-\cos\theta_1) + L_2(1-\cos\theta_2)]$$

La ecuación de Lagrange es $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} + \dfrac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} - \dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} = 0.$ Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_1} &= \frac{d}{dt}\{m_1L_1^2\dot{\theta}_1 + m_2[L_1^2\dot{\theta}_1 + L_1L_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)]\}\\ &= m_1L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2[L_1^2\ddot{\theta}_1 + L_1L_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)] + L_1L_2\dot{\theta}_2\frac{d}{dt}[m_2\cos(\theta_2-\theta_1)]\\ &= m_1L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2L_1L_2\ddot{\theta}_2\end{aligned}$$

donde $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$, $\cos(\theta_2-\theta_1) = 1$ y $\dfrac{d}{dt}[\cos(\theta_2-\theta_1)] = 0$, puesto que se supone que los ángulos de oscilación son pequeños. Así mismo,

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_1} = m_1gL_1\operatorname{sen}\theta_1 + m_2gL_1\operatorname{sen}\theta_1$$

De modo que la primera ecuación de movimiento está dada por:

$$(m_1+m_2)L_1\ddot{\theta}_1 + m_2L_2\ddot{\theta}_2 + (m_1+m_2)g\theta_1 = 0$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_2} &= \frac{d}{dt}[m_2L_2^2\dot{\theta}_2 + m_2L_1L_2\dot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)]\\ &= m_2L_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2L_1L_2\ddot{\theta}_1\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_2} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_2} = m_2gL_2\operatorname{sen}\theta_2$$

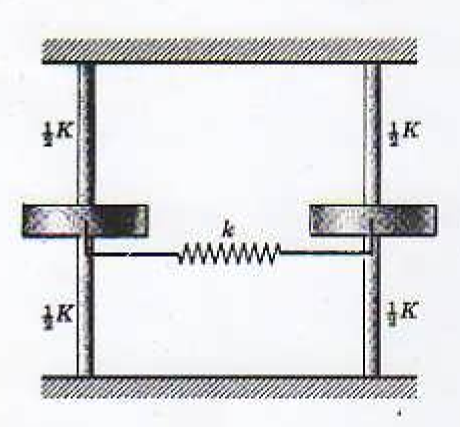
y la segunda ecuación de movimiento es:

$$L_2\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 + L_1\ddot{\theta}_1 = 0$$

22. En la figura 2-26 se muestra un resorte que une dos rotores iguales montados sobre dos ejes circulares idénticos. Si los valores de las constantes son

$$k = 5,\ K = 90,\ J = 1,\ a = 2$$

determine las ecuaciones de movimiento y las frecuencias naturales del sistema.



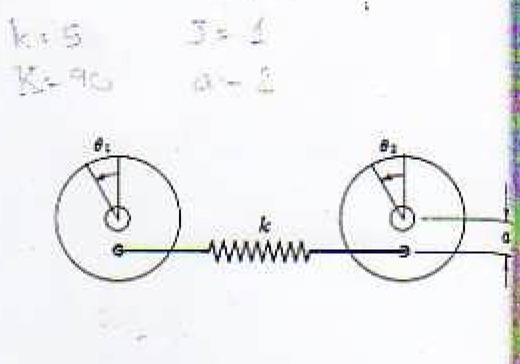


Fig. 2-26

θ_1 y θ_2 representan los desplazamientos angulares de los rotores. Las expresiones de energía del sistema pueden expresarse como:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}K(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \tfrac{1}{2}ka^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

donde J es el momento de inercia del rotor. Ahora,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_1} = J\ddot{\theta}_1, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_1} = K\theta_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2)$$

Por tanto, la ecuación de Lagrange nos da:

$$J\ddot{\theta}_1 + K\theta_1 + ka^2(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

Similarmente, la segunda ecuación de movimiento está dada por:

$$J\ddot{\theta}_2 + K\theta_2 + ka^2(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

Remplazando los valores de las constantes en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$\ddot{\theta}_1 + 110\theta_1 - 20\theta_2 = 0$$
$$\ddot{\theta}_2 + 110\theta_2 - 20\theta_1 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea,

$$\theta_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \qquad \text{y} \qquad \theta_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$

Remplazando y simplificando, tenemos:

$$(110 - \omega^2)A - 20B = 0$$
$$-20A + (110 - \omega^2)B = 0$$

y la ecuación de frecuencia es:

$$(110 - \omega^2)(110 - \omega^2) - 20^2 = 0$$

que nos da $\omega_1 = 9{,}43$ y $\omega_2 = 11{,}3$ rad/seg.

23. Un péndulo simple de longitud L y peso mg está pivotado a la masa M, la cual desliza sin fricción sobre un plano horizontal, como se muestra en la figura 2-27. Utilice la ecuación de Lagrange para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema.

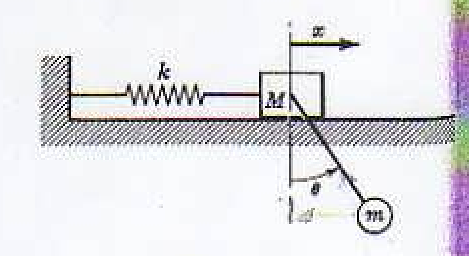


Fig. 2-27

$x(t)$ denota el desplazamiento de la masa M y $\theta(t)$ denota la oscilación angular del péndulo. La energía cinética del sistema se debe al movimiento de la masa M y a la oscilación del disco del

péndulo que tiene una masa m. La energía potencial proviene del resorte (ya esté en tracción o en compresión) y de la posición del disco del péndulo, como se muestra en la figura 2-28.

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2 + mgL(1-\cos\theta)$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x} = kx$$

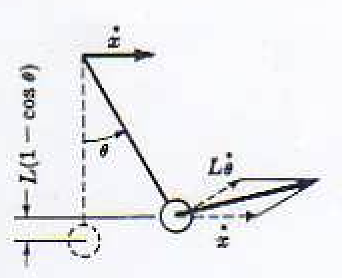


Fig. 2-28

Empleando la ecuación de Lagrange, obtenemos:

$$(M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0$$

Para ángulos de oscilación pequeños, $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$, $\cos\theta = 1$. Despreciando los términos de orden superior, la ecuación de movimiento se convierte en:

$$(M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + kx = 0$$

Similarmente, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}} = mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x}$, $\quad \dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta} = 0$, $\quad \dfrac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta} = mLg\theta$

y la segunda ecuación de movimiento es:

$$L\ddot{\theta} + g\theta + \ddot{x} = 0$$

24. Resuelva el ejercicio del péndulo físico, tratado en el problema 13, por medio de la ecuación de Lagrange.

La energía cinética del sistema consta de dos partes: (a) de traslación y (b) de rotación.

$$(\text{E.C.})_a = \tfrac{1}{2}m_1(a_1\dot{\theta}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2[(L^2\dot{\theta}_1^2 + a_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2La_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)]$$

$$(\text{E.C.})_b = \tfrac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$$

donde J_1 y J_2 son los momentos de inercia de los péndulos 1 y 2 con respecto a sus correspondientes puntos pivotados. Entonces,

$$(\text{E.C.})_{\text{sistema}} = (\text{E.C.})_a + (\text{E.C.})_b$$

$$(\text{E.P.})_{\text{sistema}} = m_1ga_1(1-\cos\theta_1) + m_2g[L(1-\cos\theta_1) + a_2(1-\cos\theta_2)]$$

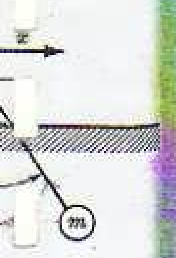
La ecuación de Lagrange es $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} - \dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \dfrac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} = 0.$ Ahora

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_1} = \ddot{\theta}_1(m_1a_1^2 + m_2L^2 + J_1) + m_2La_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_1} = m_1ga_1\theta_1 + m_2gL\theta_1$$

donde $\operatorname{sen}\theta_1 \doteq \theta_1$, $\cos\theta_1 = 1$, y $m_2La_2\dot{\theta}_2\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2) = 0$, puesto que se supone que, los ángulos de oscilación son pequeños. Por tanto, la primera ecuación de movimiento es:

$$(J_1 + m_1a_1^2 + m_2L^2)\ddot{\theta}_1 + (m_1a_1g + m_2gL)\theta_1 + m_2a_2L\ddot{\theta}_2 = 0$$

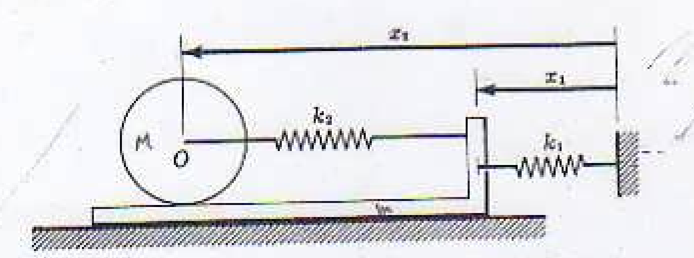


Similarmente, $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}_2} = (m_2a_2^2 + J_2)\ddot{\theta}_2 + m_2La_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)$

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta_2} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta_2} = m_2ga_2\theta_2$$

y así, $\quad (J_2 + m_2a_2^2)\ddot{\theta}_2 + m_2ga_2\theta_2 + m_2a_2L\ddot{\theta}_1 = 0$

25. Un cilindro sólido homogéneo de masa M y radio r, rueda sin deslizar sobre un carro de masa m como se muestra en la figura 2-29. El carro, que está unido a dos resortes de constantes k_1 y k_2 respectivamente, puede deslizar libremente sobre una superficie horizontal. Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema por medio de la ecuación de Lagrange.



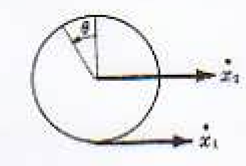


Fig. 2-29

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$$

donde $J_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ es el momento de inercia del cilindro con respecto a su centro. Como el cilindro rueda sin deslizar

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \tfrac{1}{4}M(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

Ahora, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} = m\ddot{x}_1 - \tfrac{1}{2}M(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$, $\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = 0$, $\dfrac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_1} = k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1)$

Por tanto, la primera ecuación de movimiento es:

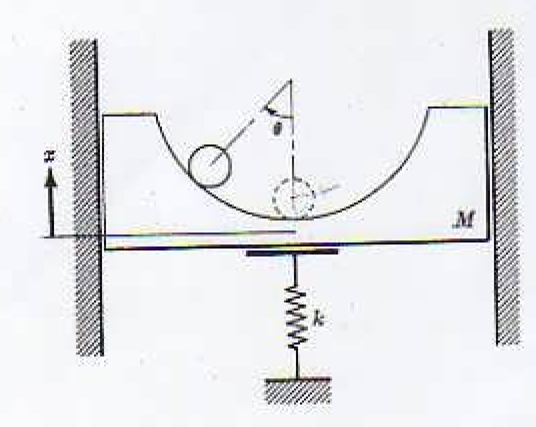
$$(m + M/2)\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - (M/2)\ddot{x}_2 - k_2x_2 = 0$$

Similarmente, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_2} = M\ddot{x}_2 + \tfrac{1}{2}M(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$, $\dfrac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} = 0$, $\dfrac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} = k_2(x_2 - x_1)$

y

$$(3M/2)\ddot{x}_2 + k_2x_2 - (M/2)\ddot{x}_1 - k_2x_1 = 0$$

26. Un cilindro circular de radio r y masa m, rueda sin deslizar dentro de una acanaladura semicircular de radio R. El bloque M está soportado por un resorte de constante k y está restringido a moverse sin fricción por una guía vertical, como se muestra en la figura 2-30. Encuentre las ecuaciones de movimiento del sistema por medio de la ecuación de Lagrange.



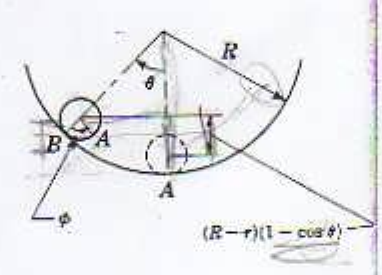


Fig. 2-30

Las expresiones de energía cinética y potencial pueden escribirse como:

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}kx^2 + mg(R-r)(1-\cos\theta)$$
$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J_o(\dot{\phi}-\dot{\theta})^2$$

donde el momento de inercia del cilindro es $J_o = \frac{1}{2}mr^2$. Además, longitud del arco $AB = R\theta = r\phi$; por tanto, $\phi = R\theta/r$. La velocidad del centro del cilindro es:

$$v = \sqrt{[(R-r)\dot{\theta}]^2 + \dot{x}^2 - 2[(R-r)\dot{\theta}\dot{x}\cos(90°+\theta)]}$$

y de aquí,

$$v^2 = [(R-r)\dot{\theta}]^2 + \dot{x}^2 + 2(R-r)\dot{\theta}\dot{x}\,\text{sen}\,\theta$$

Por tanto, $\text{E.C.} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}m\dot{\theta}^2(R-r)^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}(R-r)\,\text{sen}\,\theta]$

Suponiendo que los ángulos de oscilación son pequeños ($\text{sen}\,\theta \doteq \theta$, $\cos\theta \doteq 1$) y despreciando los términos de orden superior, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}} = M\ddot{x} + m\ddot{x} + m\ddot{\theta}(R-r)\,\text{sen}\,\theta + m\dot{\theta}^2(R-r)\cos\theta$$
$$= (M+m)\ddot{x} + m(R-r)\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x} = kx$$

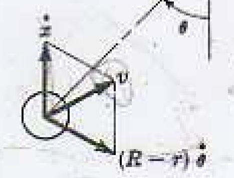


Fig. 2-31

De este modo se obtiene la primera ecuación de movimiento, por medio de la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x} = 0$$

o

$$(M+m)\ddot{x} + kx + m(R-r)\ddot{\theta}\,\text{sen}\,\theta = 0$$

Similarmente,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}(R-r)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\theta} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial\theta} = mg(R-r)\,\text{sen}\,\theta$$

y de aquí,

$$\tfrac{3}{2}(R-r)\ddot{\theta} + (\ddot{x}+g)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

27. La figura 2-32 muestra un sistema masa-resorte, con amortiguamiento de dos grados de libertad. Determine las ecuaciones de movimiento del sistema por medio de la ecuación de Lagrange.

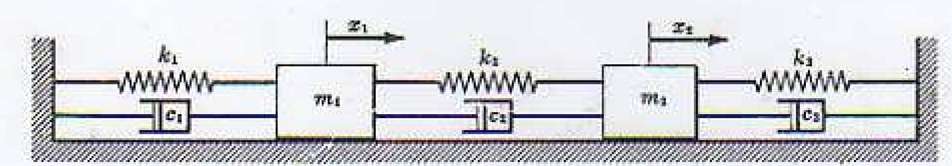


Fig. 2-32

La ecuación de Lagrange para sistemas con amortiguamiento es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{q}_i} = 0$$

donde

$$\text{E.D.} = \tfrac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2 + \tfrac{1}{2}c_3\dot{x}_2^2$$

se conoce como la energía de disipación del sistema debida a la presencia de amortiguamiento, el cual está representado en este problema por amortiguadores.

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2 + \tfrac{1}{2}k_3x_2^2$$

Ahora,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} = m_1\ddot{x}_1, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = k_1x_1 + k_2(x_1-x_2)$$

$$\frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_1} = c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2)$$

entonces la primera ecuación de movimiento es:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 = 0$$

Similarmente, $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_2} = m_2\ddot{x}_2, \quad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} = -k_2(x_1 - x_2) + k_3x_2$

$$\frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_2} = -c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_3\dot{x}_2$$

y

$$m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - c_2\dot{x}_1 - k_2x_1 = 0$$

28. La figura 2-33 muestra un sistema masa-resorte amortiguado, que tiene vibración forzada. Encuentre las ecuaciones de movimiento por medio de la ecuación de Lagrange.

La ecuación de Lagrange para sistemas con amortiguamiento y excitación puede escribirse como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{q}_i} = Q_i$$

donde Q_i es la excitación. Para este sistema,

$$Q_1 = 0 \quad \text{y} \quad Q_2 = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

$$\text{E.D.} = \tfrac{1}{2}c\dot{x}_1^2$$

Fig. 2-33

Ahora, $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_1} = k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1), \quad \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_1} = c\dot{x}_1$

y por tanto la primera ecuación de movimiento es:

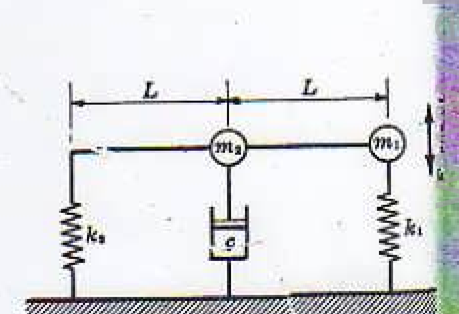
$$c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$

Similarmente, $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_2} = m\ddot{x}_2, \quad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} = k_2(x_2 - x_1), \quad \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_2} = 0$

y

$$m\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = F_0 e^{i\omega t}$$

29. Dos masas m_1 y m_2 están aseguradas a una barra rígida de peso despreciable, la cual está soportada por dos resortes k_1 y k_2 y un amortiguador c, como se muestra en la figura 2-34. Si el movimiento de la barra está restringido al plano del papel, determine las ecuaciones de movimiento del sistema por medio de la ecuación de Lagrange.



$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}k_1x_1^2 + \tfrac{1}{2}k_2(2x_2 - x_1)^2$$

$$\text{E.D.} = \tfrac{1}{2}c\dot{x}_2^2$$

$$Q_1 = F_0 \cos\omega t \quad \text{y} \quad Q_2 = 0$$

La ecuación de Lagrange para este sistema puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_2} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_2} = Q_2$$

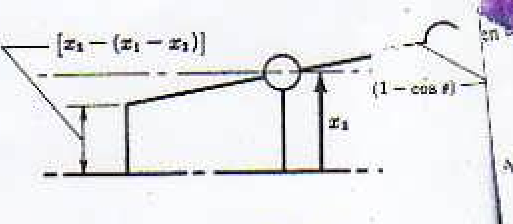


Fig. 2-34

Ahora. $\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_1} = m\ddot{x}_1, \quad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_1} = k_1x_1 - k_2(2x_2 - x_1), \quad \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_1} = 0$

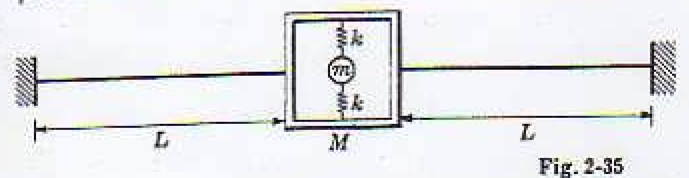
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{x}_2} = m\ddot{x}_2, \quad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x_2} = 2k_2(2x_2 - x_1), \quad \frac{\partial(\text{E.D.})}{\partial\dot{x}_2} = c\dot{x}_2$$

y por tanto las ecuaciones de movimiento son:

$$m\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - 2k_2x_2 = F_0 \cos \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + 4k_2x_2 - 2k_2x_1 = 0$$

SISTEMA EQUIVALENTE

30. Un marco de acero rígido de masa M está sostenido por medio de un alambre tensionado de longitud $2L$, como se muestra en la figura 2-35. Dentro del marco se suspende una pequeña masa m por medio de dos resortes de constante k. Determine el sistema masa-resorte equivalente.



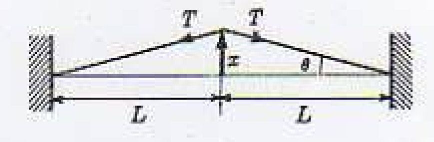


Fig. 2-35

Para ángulos de oscilación pequeños, $\text{sen}\,\theta = \tan\theta = x/L$. De este modo, la fuerza restauradora del marco debida a la tensión en el alambre está dada por:

$$F_x = 2Tx/L$$

donde T es la tensión en el alambre, que permanece constante para ángulos de oscilación pequeños. Por consiguiente, la constante de elasticidad equivalente es:

$$k_{eq} = 2T/L$$

Por tanto la acción elástica del alambre puede remplazarse por una constante de elasticidad $k_{eq} = 2T/L$ y el sistema equivalente es el que se muestra en la figura 2-36. Las ecuaciones de movimiento de los dos sistemas son idénticas y son:

$$M\ddot{x}_1 + (2T/L + 2k)x_1 - 2kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + 2k(x_2 - x_1) = 0$$

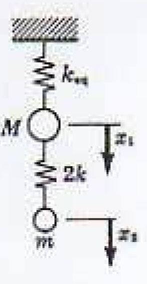


Fig. 2-36

31. Una varilla rígida de peso despreciable y longitud $2L$ está pivotada en su centro y es restringida a moverse en el plano vertical por medio de resortes y masas colocados en sus extremos, como se muestra en la figura 2-37. Determine el sistema equivalente.

Las ecuaciones de movimiento del sistema dado son:

$$2mL^2\ddot{\theta} + 2kL^2\theta - kLx = T_0 \text{ sen } \omega t$$
$$m\ddot{x} + 2kx - kL\theta = 0$$

donde θ denota el desplazamiento angular de la varilla y x el desplazamiento rectilíneo de la masa m, tal como se muestra.

Para el sistema masa-resorte de dos grados de libertad, que se muestra en la figura 2-38, las ecuaciones de movimiento son:

en c... $2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \text{ sen } \omega t$
... $\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 = 0$

Ahora, ...los pares de ecuaciones de movimiento no son ...te iguales, pero son de la misma forma. Pues- ... sistemas equivalentes deben tener las mismas ...s naturales, se requiere una comparación de ...ncias naturales y por tanto de las ecuaciones de ...ia de los dos sistemas.

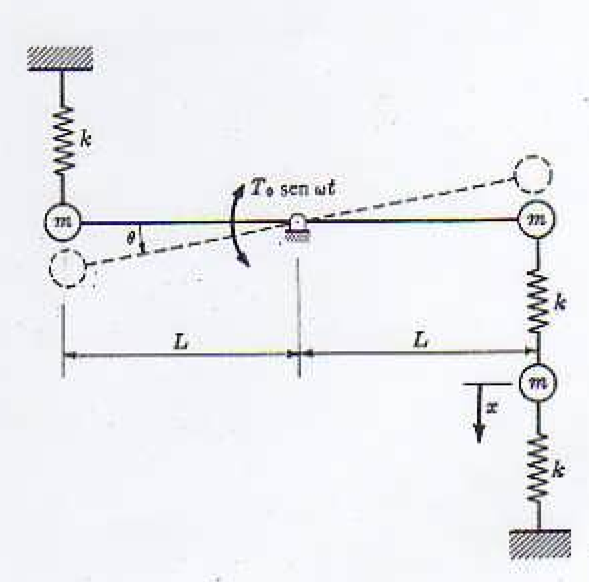


Fig. 2-37

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t+\psi), & \ddot{x} &= -\omega^2 A\cos(\omega t+\psi)\\ \theta &= B\cos(\omega t+\psi), & \ddot{\theta} &= -\omega^2 B\cos(\omega t+\psi)\\ x_1 &= C\,\text{sen}\,(\omega t+\psi), & \ddot{x}_1 &= -\omega^2 C\,\text{sen}\,(\omega t+\psi)\\ x_2 &= D\,\text{sen}\,(\omega t+\psi), & \ddot{x}_2 &= -\omega^2 D\,\text{sen}\,(\omega t+\psi) \end{aligned}$$

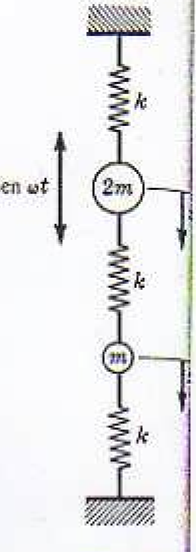


Fig. 2-38

Remplazando estas expresiones en los dos pares de ecuaciones de movimiento y simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} (2k - m\omega^2)A - kLB &= 0\\ -kA + (2kL - 2mL\omega^2)B &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} (2k - 2m\omega^2)C - kD &= 0\\ -kC + (2k - m\omega^2)D &= 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de frecuencia se encuentran igualando a cero los determinantes de los coeficientes de A y B y de C y D. En ambos casos obtenemos:

$$2m^2\omega^4 - 6mk\omega^2 + 3k^2 = 0$$

En consecuencia los dos sistemas son equivalentes.

La equivalencia de los dos sistemas también puede establecerse de las ecuaciones de movimiento, considerando que

$$x_1 = L\theta, \quad F_0 = T_0/L, \quad x_2 = x$$

VIBRACION FORZADA

32. Utilice el método de la impedancia mecánica para hallar las respuestas del estado estacionario del sistema general masa-resorte de dos grados de libertad, que se muestra en la figura 2-39.

Para vibraciones forzadas sin amortiguamiento, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 &= F_0\,\text{sen}\,\omega t\\ m_2\ddot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Remplazando $F_0e^{i\omega t}$ por F_0 sen ωt, $\mathbf{X}_1e^{i\omega t}$ por x_1 y $\mathbf{X}_2e^{i\omega t}$ por x_2, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\begin{aligned} m_1i^2\omega^2\mathbf{X}_1e^{i\omega t} + (k_1+k_2)\mathbf{X}_1e^{i\omega t} - k_2\mathbf{X}_2e^{i\omega t} &= F_0e^{i\omega t}\\ m_2i^2\omega^2\mathbf{X}_2e^{i\omega t} + k_2\mathbf{X}_2e^{i\omega t} - k_2\mathbf{X}_1e^{i\omega t} &= 0 \end{aligned}$$

Fig. 2-39

donde $i = \sqrt{-1}$. Dividiendo por $e^{i\omega t}$ y cambiando el orden, obtenemos:

$$\begin{aligned} (k_1+k_2-m_1\omega^2)\mathbf{X}_1 - k_2\mathbf{X}_2 &= F_0\\ -k_2\mathbf{X}_1 + (k_2 - m_2\omega^2)\mathbf{X}_2 &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo por la regla de Cramer,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2\\ 0 & (k_2-m_2\omega^2)\end{vmatrix}}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (k_1+k_2-m_1\omega^2) & F_0\\ -k_2 & 0\end{vmatrix}}{(k_1+k_2-m_1\omega^2)(k_2-m_2\omega^2) - k_2^2}$$

o

$$\mathbf{X}_1 = \frac{F_0(k_2-m_2\omega^2)}{m_1m_2\omega^4 - (m_1k_2+m_2k_2+m_2k_1)\omega^2 + k_1k_2}$$

$$\mathbf{X}_2 = \frac{F_0k_2}{m_1m_2\omega^4 - (m_1k_2+m_2k_2+m_2k_1)\omega^2 + k_1k_2}$$

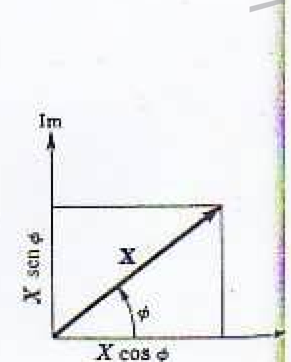


Fig. 2-40

Como la función fuerza es $F_0 \text{ sen } \omega t = \text{Im}\,(F_0 e^{i\omega t})$, entonces $x_1 = \text{Im}\,(\mathbf{X}_1 e^{i\omega t})$, o sea que

$$x_1 = \text{Im}\,(X_1 e^{i\phi})(e^{i\omega t}) = \text{Im}\,(X_1 e^{i(\omega t+\phi)})$$
$$= \text{Im}\,[X_1 \cos(\omega t + \phi) + iX_1 \text{ sen } (\omega t + \phi)] = X_1 \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

Similarmente,

$$x_2 = X_2 \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

Pero $\mathbf{X}_1 = X_1 (\cos\phi + i \text{ sen } \phi)$; y la expresión de $\mathbf{X}_1$ contiene únicamente cantidades reales. Así que $\phi = 0°$ o $180°$, es decir, el movimiento de la masa está en fase con la excitación o con un defasaje de 180°. Por consiguiente, $\mathbf{X}_1 = X_1$ y $\mathbf{X}_2 = X_2$.

Las respuestas del estado estacionario son:

$$x_1(t) = \frac{F_0(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_2 + m_2 k_1)\omega^2 + k_1 k_2} \text{ sen } \omega t$$

$$x_2(t) = \frac{F_0 k_2}{m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_2 + m_2 k_1)\omega^2 + k_1 k_2} \text{ sen } \omega t$$

33. Determine la vibración del estado estacionario de las dos masas m_1 y m_2 que se muestran en la figura 2-41.

De los diagramas de cuerpo libre, las dos ecuaciones de fuerza pueden escribirse:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) + F_0 \cos \omega t$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2$$

o

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = F_0 \cos \omega t$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_2 x_1 = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes armónicos

$$x_1 = A \cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{x}_1 = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$
$$x_2 = B \cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{x}_2 = -B\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2 B = F_0$$
$$-k_2 A + (k_2 + k_3 - m_2\omega^2)B = 0$$

Fig. 2-41

Por medio de la regla de Cramer se encuentran A y B:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k_2 \\ 0 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2} = \frac{F_0(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & F_0 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2} = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2}$$

Después de que la vibración libre ha desaparecido, la vibración que permanece es un movimiento armónico simple de frecuencia igual a la frecuencia de la fuerza. El ángulo de fase es 0° ó 180°, ya que el movimiento de la masa está en fase o con un defasaje de 180° respecto a la excitación. Por tanto la vibración del estado estacionario está dada por:

$$x_1(t) = \frac{F_0(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2} \cos \omega t$$

$$x_2(t) = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2) - k_2^2} \cos \omega t$$

34. Al soporte del sistema masa-resorte, que se muestra en la figura 2-42, se le da un desplazamiento forzado sinusoidal $x(t) = F_0 \cos \omega t$. Encuentre las vibraciones del estado estacionario de las masas.

Fig. 2-42

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = k_1 F_0 \cos \omega t$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Puesto que no hay amortiguamiento, las masas vibran en fase o con un defasaje de 180° respecto al movimiento forzado. Por consiguiente, sean:

$$x_1 = A \cos \omega t, \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \cos \omega t$$
$$x_2 = B \cos \omega t, \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \cos \omega t$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2 B = k_1 F_0$$
$$-k_2 A + (k_2 - m_2\omega^2)B = 0$$

Por la regla de Cramer hallamos A y B:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 k_1 & -k_2 \\ 0 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}}, \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & F_0 k_1 \\ -k_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2\omega^2) \end{vmatrix}}$$

y las vibraciones del estado estacionario son:

$$x_1(t) = \frac{F_0 k_1(k_2 - m_2\omega^2)}{m_1 m_2 \omega^4 - [k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2]\omega^2 + k_1 k_2} \cos \omega t$$

$$x_2(t) = \frac{k_1 k_2 F_0}{m_1 m_2 \omega^4 - [k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2]\omega^2 + k_1 k_2} \cos \omega t$$

35. Un bloque de masa m, que descansa sobre un plano horizontal sin fricción, está unido a una varilla homogénea de sección uniforme que tiene una masa M y una longitud L, por medio de un resorte de constante k, como se muestra en la figura 2-43. Determine la respuesta del estado estacionario del bloque.

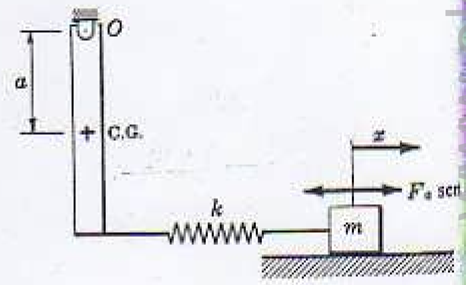


Fig. 2-43

Aplicando la ecuación de fuerzas $\Sigma F = ma$ al bloque, y la ecuación de momentos $\Sigma M = J\ddot{\theta}$ al punto pivotado O, tenemos:

$$m\ddot{x} + kx - kL\theta = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$
$$J\ddot{\theta} + (kL^2 + Mga)\theta - kLx = 0$$

donde $J = ML^2/3$ es el momento de inercia de la varilla con respecto al punto O.

Sean $x = A \operatorname{sen} \omega t$, y $\theta = B \operatorname{sen} \omega t$; entonces $\ddot{x} = -\omega^2 A \operatorname{sen} \omega t$, y $\ddot{\theta} = -\omega^2 B \operatorname{sen} \omega t$. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(k - m\omega^2)A - kLB = F_0$$
$$-kLA + (kL^2 + Mga - J\omega^2)B = 0$$

Resolviendo,
$$A = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -kL \\ 0 & (kL^2 + Mga - J\omega^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (k - m\omega^2) & -kL \\ -kL & (kL^2 + Mga - J\omega^2) \end{vmatrix}}$$

y así,
$$x(t) = \frac{F_0(kL^2 + Mga - J\omega^2)}{mJ\omega^4 - (kJ + mkL^2 + mMga)\omega^2 + kMga} \operatorname{sen} \omega t$$

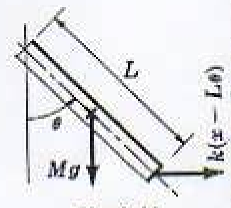


Fig. 2-44

ABSORBEDOR DE VIBRACIONES DINAMICAS

36. La figura 2-45(*a*) muestra una masa M que tiene una vibración forzada. Con el fin de disminuir tanto como sea posible la amplitud de vibración de la masa M, se agrega a ésta un sistema auxiliar masa-resorte, como se muestra en la figura 2-45(*b*). Especifique el sistema auxiliar utilizado.

En la figura 2-45(*b*) se tiene un sistema de dos grados de libertad con una función fuerza que actúa sobre la masa M. Las ecuaciones de movimiento son:

$$M\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \text{ sen } \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

Sea $x_1 = A \text{ sen } \omega t$ y $x_2 = B \text{ sen } \omega t$, entonces $\ddot{x}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } \omega t$, y $\ddot{x}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } \omega t$. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(k_1 + k_2 - M\omega^2)A - k_2 B = F_0$$
$$-k_2 A + (k_2 - m\omega^2)B = 0$$

Resolviendo, $$A = \frac{F_0(k_2 - m\omega^2)}{(k_1 + k_2 - M\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - k_2^2}$$

Para anular la amplitud de vibración de la masa M, es decir, para que $A = 0$, $(k_2 - m\omega^2)$ debe ser igual a cero. Por tanto $k_2 = m\omega^2$ y $\omega^2 = k_2/m$.

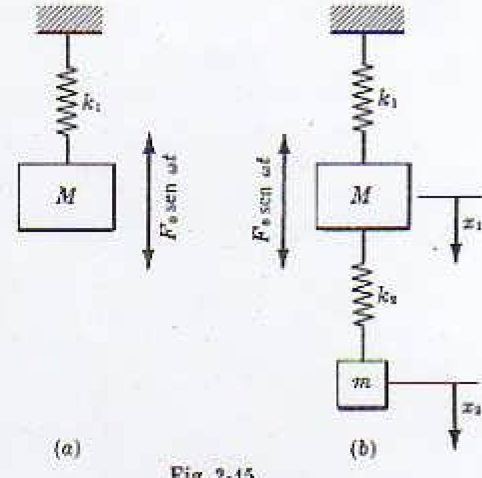
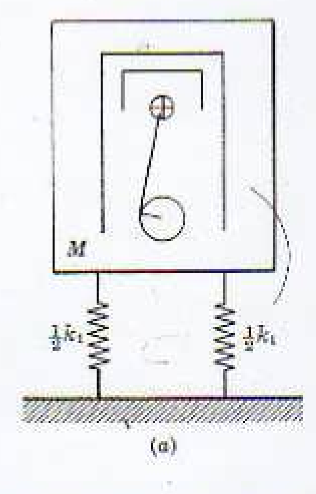


Fig. 2-45

Por consiguiente, se debe diseñar el absorbedor de modo que su frecuencia natural sea igual a la frecuencia impresa. Cuando esto ocurre, la amplitud de vibración de la masa M es prácticamente cero. En general, un absorbedor se usa únicamente cuando la frecuencia natural del sistema original es casi igual a la frecuencia de la fuerza. Por consiguiente $k_1/M = k_2/m$ es aproximadamente cierto para el sistema completo.

37. Una pequeña máquina reciprocante pesa 50 lb y gira a una velocidad constante de 6000 rpm. Después de instalada la máquina se observó que la frecuencia de la fuerza era casi igual a la frecuencia natural del sistema. ¿Qué absorbedor de vibraciones dinámicas debe agregarse, si la frecuencia natural del sistema debe diferir por lo menos en un 20% de la frecuencia impresa?



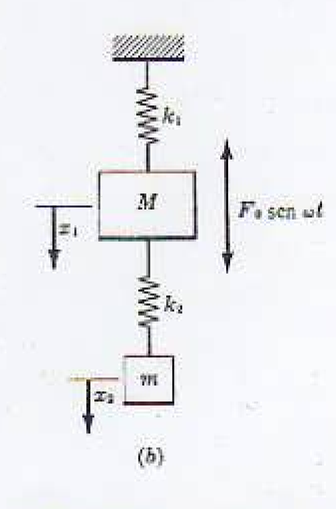


Fig. 2-46

Después de agregar el absorbedor a la máquina, el sistema completo se convierte en un sistema de dos grados de libertad, el cual es simplificado y representado en la figura 2-46(*b*).

Las amplitudes de las vibraciones del estado estacionario de las masas M y m se encuentran según se señaló en el problema 36 y están dadas por:

$$A = \frac{F_0(k_2 - m\omega^2)}{(k_1 + k_2 - M\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - k_2^2}, \qquad B = \frac{F_0 k_2}{(k_1 + k_2 - M\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - k_2^2}$$

Las frecuencias naturales del sistema completo pueden hallarse de

$$(k_1 + k_2 - M\omega^2)(k_2 - m\omega^2) - k_2^2 = 0$$

y estas frecuencias deben diferir por lo menos en un 20% de la frecuencia impresa, para evitar resonancia.

Dividiendo la última expresión por k_1k_2 obtenemos:

$$(1 + k_2/k_1 - M\omega^2/k_1)(1 - m\omega^2/k_2) - k_2/k_1 = 0$$

Pero $k_1/M = \omega_n^2$, $k_2/m = \omega_n^2$, $\omega^2/\omega_n^2 = r^2$. Remplazando estos valores en la ecuación anterior, obtenemos:

$$r^4 - (2 + k_2/k_1)r^2 + 1 = 0$$

y como $r = 0{,}8$, entonces $k_2/k_1 = 0{,}21$.

Como se señaló en el problema 36, $k_1/M = k_2/m$. Por tanto $k_2/k_1 = m/M = 0{,}21$ y $m = 0{,}21M = 10{,}5$.

Por consiguiente el absorbedor pedido debe pesar 10,5 lb y tener un resorte de constante igual a $0{,}21\,k_1$.

VIBRACION LIBRE AMORTIGUADA



38. Estudie el movimiento de un sistema masa-resorte de dos grados de libertad que tiene vibración libre amortiguada, como se muestra en la figura 2-47.

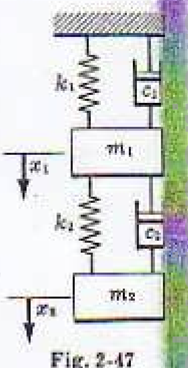


Fig. 2-47

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2\dot{x}_2 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - c_2\dot{x}_1 - k_2x_1 = 0$$

Como los componentes de vibración de un sistema amortiguado no son periódicos, es decir, que son movimientos oscilatorios con amplitudes decrecientes, sea

$$x_1 = Ae^{st}, \quad x_2 = Be^{st}$$

la forma general de solución. Remplazando estas expresiones en las ecuaciones diferenciales y dividiendo por e^{st}, tenemos:

$$[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)]A - (c_2s + k_2)B = 0$$
$$[m_2s^2 + c_2s + k_2]B - (c_2s + k_2)A = 0$$

Como en el caso de una vibración libre sin amortiguamiento, la solución de este par de ecuaciones algebraicas únicamente tiene sentido si

$$\begin{vmatrix} [m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + (k_1 + k_2)] & -(c_2s + k_2) \\ -(c_2s + k_2) & (m_2s^2 + c_2s + k_2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos:

$$[m_1s^2 + (c_1 + c_2)s + k_1 + k_2]\,[m_2s^2 + c_2s + k_2] - (c_2s + k_2)^2 = 0$$

que se conoce como la ecuación característica del sistema y tiene una forma similar a la de la ecuación de frecuencia de un sistema sin amortiguamiento. La solución de la ecuación característica producirá cuatro valores de s. Por consiguiente el movimiento general completo del sistema puede expresarse como:

$$x_1(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + A_3e^{s_3t} + A_4e^{s_4t}$$
$$x_2(t) = B_1e^{s_1t} + B_2e^{s_2t} + B_3e^{s_3t} + B_4e^{s_4t}$$

donde los cuatro coeficientes desconocidos A_1, A_2, A_3, y A_4 (las B no son incógnitas diferentes, puesto que $B_1 = \lambda_1A_1$, $B_2 = \lambda_2A_2$, $B_3 = \lambda_3A_3$ y $B_4 = \lambda_4A_4$) se hallan de las cuatro condiciones iniciales, a saber: $x_1(0)$, $x_2(0)$, $\dot{x}_1(0)$ y $\dot{x}_2(0)$.

Las razones de amplitud se hallan de las ecuaciones algebraicas de los coeficientes A y B:

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{c_2s_i + k_2}{m_1s_i^2 + (c_1 + c_2)s_i + k_1 + k_2} = \frac{m_2s_i^2 + c_2s_i + k_2}{c_2s_i + k_2} = \frac{1}{\lambda_i}$$

donde $i = 1, 2, 3, 4$.

Suponga que las raíces de la ecuación característica son complejas; entonces deben existir las correspondientes raíces conjugadas, es decir,

$$s_1 = -(r + id) \qquad \text{y} \qquad s_2 = -(r - id)$$

y así,

$$\begin{aligned} A_1 e^{-(r+id)t} + A_2 e^{-(r-id)t} &= e^{-rt}[A_1 e^{-idt} + A_2 e^{idt}] \\ &= e^{-rt}[A_1 \cos dt - iA_1 \operatorname{sen} dt + A_2 \cos dt + iA_2 \operatorname{sen} dt] \\ &= Ce^{-rt} \operatorname{sen}(dt + \psi) \end{aligned}$$

Similarmente,

$$B_1 e^{s_1 t} + B_2 e^{s_2 t} = De^{-rt} \operatorname{sen}(dt + \psi)$$

Por tanto el movimiento general es:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= Ce^{-rt} \operatorname{sen}(dt + \psi) + A_3 e^{s_3 t} + A_4 e^{s_4 t} \\ x_2(t) &= De^{-rt} \operatorname{sen}(dt + \psi) + B_3 e^{s_3 t} + B_4 e^{s_4 t} \end{aligned}$$

que son movimientos oscilatorios no periódicos de amplitud decreciente.

VIBRACION FORZADA CON AMORTIGUAMIENTO

NO!!!

39. El sistema mostrado en la figura 2-48 tiene una vibración forzada. Determine el movimiento general del sistema.

Las ecuaciones de movimiento para vibración forzada con amortiguamiento son:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - c_2\dot{x}_2 - k_2 x_2 &= F_0 \operatorname{sen} \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2 x_2 - c_2\dot{x}_1 - k_2 x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Fig. 2-48

Utilizando el método de la impedancia mecánica, remplace $F_0 e^{i\omega t}$ por F_0 sen ωt, $\mathbf{X}_1 e^{i\omega t}$ por x_1 y $\mathbf{X}_2 e^{i\omega t}$ por x_2. Cambiando el orden y dividiendo por $e^{i\omega t}$, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\begin{aligned} [(k_1 + k_2) - m_1\omega^2 + i(c_1 + c_2)\omega]\mathbf{X}_1 - (k_2 + ic_2\omega)\mathbf{X}_2 &= F_0 \\ -(k_2 + ic_2\omega)\mathbf{X}_1 + [k_2 - m_2\omega^2 + ic_2\omega]\mathbf{X}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo por la regla de Cramer, obtenemos:

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -(k_2 + ic_2\omega) \\ 0 & (k_2 - m_2\omega^2 + ic_2\omega) \end{vmatrix}}{[(k_1 + k_2) - m_1\omega^2 + i(c_1 + c_2)\omega][k_2 - m_2\omega^2 + ic_2\omega] - (k_2 + ic_2\omega)^2}$$

que es de la forma $(A + iB)/(C + iD)$ o $(G + iH)$ y $X_1 = \sqrt{\dfrac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}}$ o

$$X_1 = \sqrt{\frac{F_0^2(k_2 - m_2\omega^2)^2 + c_2^2\omega^2}{[(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - m_2 k_2\omega^2]^2 + \omega^2 c_2^2(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)^2}}$$

Similarmente,

$$X_2 = \sqrt{\frac{F_0^2(k_2^2 + c_2^2\omega^2)}{[(k_1 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - m_2 k_2\omega^2]^2 + \omega^2 c_2^2(k_1 - m_1\omega^2 - m_2\omega^2)^2}}$$

De la teoría de variables complejas, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= F_0(G + iH) = X_1 e^{i\phi_1} = X_1(\cos\phi_1 + i \operatorname{sen}\phi_1) \\ \mathbf{X}_2 &= F_0(K + iL) = X_2 e^{i\phi_2} = X_2(\cos\phi_2 + i \operatorname{sen}\phi_2) \end{aligned}$$

donde $\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{H}{G}$ y $\phi_2 = \tan^{-1}\dfrac{L}{K}$.

Pero la función fuerza es $F_0 \operatorname{sen} \omega t = \operatorname{Im}(F_0 e^{i\omega t})$ y así,

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Im}(\mathbf{X}_1 e^{i\omega t}) = \operatorname{Im}(X_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}) = X_1 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_1) \\ x_2 &= \operatorname{Im}(\mathbf{X}_2 e^{i\omega t}) = \operatorname{Im}(X_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}) = X_2 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

donde las expresiones para X_1, X_2, ϕ_1 y ϕ_2 son las que se señalaron anteriormente.

Si la función fuerza es $F_0 \cos \omega t$, entonces,

$$x_1 = \text{Re}(X_1^{i(\omega t+\phi_1)}) = X_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = \text{Re}(X_2^{i(\omega t+\phi_2)}) = X_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

y si la función fuerza es $F_0 e^{i\omega t}$, entonces.

$$x_1 = X_1 \,\text{sen}\,(\omega t + \phi_1) + iX_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = X_2 \,\text{sen}\,(\omega t + \phi_2) + iX_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

40. Un sistema masa-resorte de dos grados de libertad, que tiene una vibración forzada, se muestra la figura 2-49. Suponga que el valor del amortiguamiento del aire es $c = 1$ lb-pul/seg y las constantes de elasticidad son $k_1 = k_2 = 1$ lb/pul. Determine las vibraciones amortiguadas del estado estacionario de las masas si $W_1 = W_2 = 1$ lb y $\omega = 1$.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_0 \cos t$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0$$

donde c representa la resistencia del aire.

Utilizando el método de la impedancia mecánica y remplazando $F_0 \cos t$ por $F_0 e^{it}$, x_1 por $\mathbf{X}_1 e^{it}$ y x_2 por $\mathbf{X}_2 e^{it}$, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$[(k_1 + k_2) - m + ic]\mathbf{X}_1 - k_2\mathbf{X}_2 = F_0$$
$$(k_2 - m_2 + ic)\mathbf{X}_2 - k_2\mathbf{X}_1 = 0$$

Remplazando los valores $k_1 = k_2 = 1$, $m_1 = m_2 = 1$ y $c = 1$ en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(1 + i)\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2 = F_0, \qquad -\mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2 = 0$$

Fig. 2-49

Resolviendo por la regla de Cramer,

$$\mathbf{X}_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -1 \\ 0 & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+i) & -1 \\ -1 & i \end{vmatrix}} = \frac{iF_0}{i-2}, \qquad \mathbf{X}_2 = \frac{\begin{vmatrix} (1+i) & F_0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+i) & -1 \\ -1 & i \end{vmatrix}} = \frac{F_0}{i-2}$$

Simplificando, tenemos:

$$\mathbf{X}_1 = F_0(0.2 - 0.4i), \qquad \mathbf{X}_2 = F_0(-0.4 - 0.2i)$$

y por tanto,

$$X_1 = F_0\sqrt{(0.2^2 + 0.4^2)} = 0.45F_0, \qquad X_2 = F_0\sqrt{(0.2^2 + 0.4^2)} = 0.45F_0$$
$$\phi_1 = \tan^{-1}(-0.4/0.2) = -63.4°, \qquad \phi_2 = \tan^{-1}(-0.2/-0.4) = 26.6°$$

Pero la función fuerza es $F_0 \cos t = \text{Re}(F_0 e^{it})$ y $\mathbf{X}_1 = X_1 e^{i\phi_1}$. Entonces,

$$x_1 = \text{Re}(\mathbf{X}_1 e^{it}) = \text{Re}(X_1 e^{i\phi_1} e^{it}) = X_1 \cos(t + \phi_1)$$

Similarmente,

$$x_2 = X_2 \cos(t + \phi_2)$$

Por consiguiente las vibraciones amortiguadas del estado estacionario están dadas por:

$$x_1 = 0.45F_0 \cos(t - 63.4°)$$
$$x_2 = 0.45F_0 \cos(t + 26.6°)$$

PRINCIPIO DE LA ORTOGONALIDAD

41. Demuestre el principio de la ortogonalidad para un sistema vibrante común de dos grados de libertad por medio de consideraciones de energía.

En general, el movimiento de un sistema vibrante de dos grados de libertad está dado por:

$$x_1(t) = A_1 \,\text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \,\text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2)$$
$$x_2(t) = B_1 \,\text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \,\text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2)$$

donde A_1, A_2, B_1 y B_2 son las amplitudes de vibración de las dos masas, ψ_1 y ψ_2 los ángulos de fase y ω_1 y ω_2 las frecuencias naturales del sistema.

La energía cinética del sistema es:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}(\text{E.C.})_{max} &= \tfrac{1}{2}m_1(\dot{x}_1)^2_{max} + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{x}_2)^2_{max}\\ &= \tfrac{1}{2}m_1(A_1\omega_1 + A_2\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(B_1\omega_1 + B_2\omega_2)^2\\ &= \tfrac{1}{2}m_1[(A_1\omega_1)^2 + (A_2\omega_2)^2 + 2(A_1\omega_1)(A_2\omega_2)] + \tfrac{1}{2}m_2[(B_1\omega_1)^2 + (B_2\omega_2)^2 + 2(B_1\omega_1)(B_2\omega_2)]\end{aligned}$$

Cuando el sistema tiene modos principales de vibración, la expresión de energía se convierte en:

$$(\text{E.C.})_{max} = \tfrac{1}{2}[m_1(A_1\omega_1)^2 + m_2(B_1\omega_1)^2] + \tfrac{1}{2}[m_1(A_2\omega_2)^2 + m_2(B_2\omega_2)^2]$$

Puesto que las dos expresiones de energía cinética máxima deben ser iguales, entonces,

$$m_1(A_1\omega_1)(A_2\omega_2) + m_2(B_1\omega_1)(B_2\omega_2) = 0$$

donde ω_1 y ω_2 son las frecuencias naturales de un sistema de dos grados de libertad y por tanto no pueden ser siempre iguales a cero, por consiguiente:

$$m_1(A_1A_2) + m_2(B_1B_2) = 0$$

42. La masa m, sujetada por los resortes $k_1, k_2, \ldots, k_n$, como se muestra en la figura 2-50, está restringida a moverse en el plano x-y, sin fricción. Si la masa m se desplaza de su posición de equilibrio estático O y se deja en libertad, demuestre que sus modos principales de vibración son ortogonales.

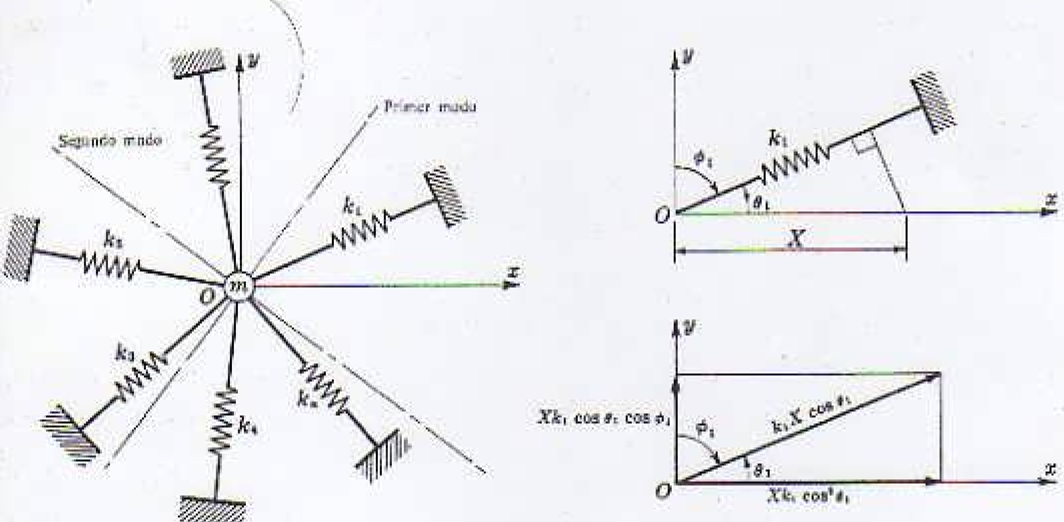


Fig. 2-50

Como la masa m está restringida a moverse en el plano x-y, este es un sistema de dos grados de libertad. Cuando se aplican a la masa las condiciones iniciales apropiadas, ésta vibrará en el primer modo principal con frecuencia natural ω_1, o en el segundo modo principal con frecuencia natural ω_2, es decir,

$$x(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) \quad \text{y} \quad y(t) = \lambda_1 A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1)$$
$$x(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2) \quad \text{y} \quad y(t) = \lambda_2 A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2)$$

donde $\omega_1 \neq \omega_2$.

Supongamos que la masa m se desplaza X de su posición de equilibrio estático. Entonces el resorte k_1 se deforma $X\cos\theta_1$, como se muestra. La componente en el sentido x de esta fuerza elástica es $k_1(X\cos\theta_1)(\cos\theta_1) = Xk_1\cos^2\theta_1$, mientras que la componente en el sentido y de esta misma fuerza es $Xk_1\cos\theta_1\cos\phi_1$. Similarmente, las componentes en el sentido x de las fuerzas elásticas producidas por los resortes $k_2, \ldots, k_n$, son $Xk_2\cos^2\theta_2, \ldots, Xk_n\cos^2\theta_n$ y las componentes de estas mismas fuerzas en el sentido y son $Xk_2\cos\theta_2\cos\phi_2, \ldots, Xk_n\cos\theta_n\cos\phi_n$. Por consiguiente, la componente en el sentido x de la suma de todas las fuerzas producidas por los resortes está dada por:

$$X(k_1\cos^2\theta_1 + k_2\cos^2\theta_2 + \cdots + k_n\cos^2\theta_n) = (k_{xx})X$$

y la componente en el sentido y de la suma de todas las fuerzas producidas por los resortes es:

$$X(k_1\cos\theta_1\cos\phi_1 + k_2\cos\theta_2\cos\phi_2 + \cdots + k_n\cos\theta_n\cos\phi_n) = (k_{yx})X$$

De forma similar, el resorte k_1 se deforma $Y \cos \phi_1$ cuando la masa m se desplaza Y de su posición de equilibrio estático. La componente en el sentido x de esta fuerza elástica es $Yk_1 \cos \phi_1 \cos \theta_1$, mientras que la componente en el sentido y de esta misma fuerza es $Yk_1 \cos^2 \phi_1$, como se muestra. Por consiguiente, la componente en el sentido x de la suma de todas las fuerzas producidas por los resortes, debido a un desplazamiento Y de la masa, en la dirección y, está dada por

$$Y(k_1 \cos \phi_1 \cos \theta_1 + k_2 \cos \phi_2 \cos \theta_2 + \cdots + k_n \cos \phi_n \cos \theta_n) = (k_{xy})Y$$

y la componente en el sentido y es:

$$Y(k_1 \cos^2 \phi_1 + k_2 \cos^2 \phi_2 + \cdots + k_n \cos^2 \phi_n) = (k_{yy})Y$$

Las ecuaciones de movimiento de la masa m para un desplazamiento general x-y pueden expresarse como:

$$m\ddot{x} + (k_{xx})x + (k_{xy})y = 0$$
$$m\ddot{y} + (k_{yy})y + (k_{yx})x = 0$$

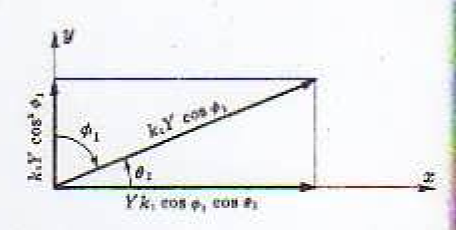


Fig. 2-51

Como se indicó en la primera parte de este problema, las amplitudes x y y de una masa que vibra en los modos principales, están en las relaciones λ_1 o λ_2. El movimiento de la masa, para los modos principales de vibración, tiene lugar a lo largo de una línea recta que pasa por el origen O.

Suponga que las amplitudes de vibración son unitarias, entonces,

$$A_1 = \cos \theta_1', \quad A_2 = \cos \theta_2', \quad B_1 = \cos \phi_1', \quad B_2 = \cos \phi_2'$$

que son los cosenos directrices de las líneas de vibración en los modos principales. Si $\cos \theta_1' \cos \theta_2' + \cos \phi_1' \cos \phi_2' = 0$ las dos líneas de vibración serán mutuamente perpendiculares.

Cuando la masa está vibrando en el primer modo principal, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$-m\omega_1^2 A_1 + (k_{xx})A_1 + (k_{xy})B_1 = 0$$
$$-m\omega_1^2 B_1 + (k_{yy})B_1 + (k_{yx})A_1 = 0$$

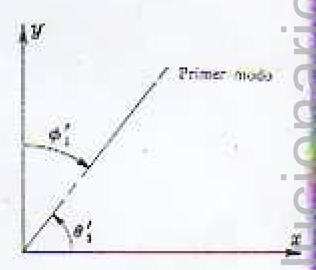


Fig. 2-52

y cuando la masa está vibrando en el segundo modo principal, las ecuaciones de movimiento son:

$$-m\omega_2^2 A_2 + (k_{xx})A_2 + (k_{xy})B_2 = 0$$
$$-m\omega_2^2 B_2 + (k_{yy})B_2 + (k_{yx})A_2 = 0$$

Multiplicando la primera de estas cuatro ecuaciones de movimiento por $-A_2$, la segunda por $-B_2$, la tercera por A_1 y la cuarta por B_1 y sumándolas, obtenemos:

$$m\omega_1^2 A_1 A_2 - (k_{xx})A_1A_2 - (k_{xy})A_2B_1 = 0$$
$$m\omega_1^2 B_1 B_2 - (k_{yy})B_1B_2 - (k_{yx})A_1B_2 = 0$$
$$-m\omega_2^2 A_1 A_2 + (k_{xx})A_1A_2 + (k_{xy})A_1B_2 = 0$$
$$-m\omega_2^2 B_1 B_2 + (k_{yy})B_1B_2 + (k_{yx})A_2B_1 = 0$$
$$mA_1A_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) + mB_1B_2(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0$$

o

$$m(A_1A_2 + B_1B_2)(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0$$

lo cual indica que,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

y por consiguiente,

$$\cos \theta_1' \cos \theta_2' + \cos \phi_1' \cos \phi_2' = 0$$

es decir, que las dos líneas rectas, a lo largo de las cuales vibran los dos modos principales, son mutuamente perpendiculares.

43. Si $k_1 = k_2 = k$ y $m_1 = m_2 = m$, demuestre que los modos principales de vibración del sistema dado en el problema 1 son ortogonales.

Remplazando estos valores en la ecuación de frecuencia, obtenemos:

$$\omega_1 = 0{,}62\sqrt{k/m} \quad \text{y} \quad \omega_2 = 1{,}62\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

De las ecuaciones de razón de amplitud obtenemos los movimientos generales de las masas:

$$x_1(t) = A_1 \text{ sen } (0{,}62\sqrt{k/m}\, t + \psi_1) + A_2 \text{ sen } (1{,}62\sqrt{k/m}\, t + \psi_2)$$
$$x_2(t) = 1{,}62A_1 \text{ sen } (0{,}62\sqrt{k/m}\, t + \psi_1) - 0.63A_2 \text{ sen } (1.62\sqrt{k/m}\, t + \psi_2)$$

de donde,

$$A_1A_2 + B_1B_2 = A_1A_2 + (1{,}62A_1)(-0{,}63A_2) = 0$$

Por consiguiente, los modos principales de vibración del sistema son ortogonales.

SISTEMA SEMI-DEFINIDO

44. Dos bloques de masa m_1 y m_2 respectivamente, están unidos por medio de un resorte de constante k y descansan sobre una superficie horizontal lisa, como se muestra en la figura 2-53. Obtenga una expresión de las frecuencias naturales del sistema.

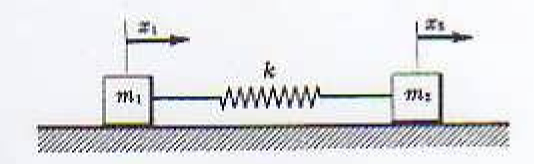


Fig. 2-53

Aplicando $\Sigma F = ma$,

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes armónicos

$$x_1 = A \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } (\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, tenemos:

$$(k - m_1\omega^2)A - kB = 0$$
$$-kA + (k - m_2\omega^2)B = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (k - m_1\omega^2) & -k \\ -k & (k - m_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante, obtenemos:

$$m_1m_2\omega^4 - k(m_1 + m_2)\omega^2 = 0 \qquad \text{o} \qquad \omega^2[m_1m_2\omega^2 - k(m_1 + m_2)] = 0$$

y las frecuencias naturales del sistema son:

$$\omega_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2}} \text{ rad/seg}$$

Como una de las frecuencias naturales del sistema es igual a cero, el sistema no oscila. En otras palabras, las dos masas se mueven como un todo, sin que haya movimiento relativo entre ellas. Este se conoce como un sistema semi-definido.

45. Un péndulo simple pende del centro de la masa M, como se muestra en la figura 2-54. La masa M está deslizando sin fricción sobre una superficie horizontal. Encuentre las frecuencias naturales del sistema.

Tome x y θ, como las coordenadas que se necesitan para especificar la configuración del sistema. Las expresiones de energía del sistema están dadas por:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}m[\dot{x}^2 + (L\dot{\theta})^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta]$$
$$\text{E.P.} = mgL(1 - \cos\theta)$$

Para ángulos de oscilación pequeños, $\text{sen } \theta \doteq \theta$, $\cos\theta = 1 - \theta^2/2$; por tanto,

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m(\dot{x} + L\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}M\dot{x}^2, \qquad \text{E.P.} = \tfrac{1}{2}mgL\theta^2$$

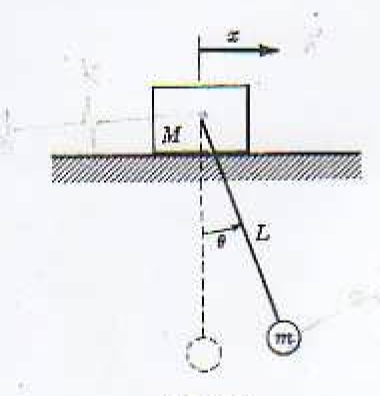


Fig. 2-54

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_1} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_1} = 0$$

Haciendo $q_1 = x$, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + m(\ddot{x} + L\ddot{\theta}), \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial x} = 0$$

De modo que la primera ecuación de movimiento está dada por:

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = 0$$

Para hallar la segunda ecuación de movimiento hacemos $q_1 = \theta$; entonces,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{\theta}} = mL(\ddot{x} + L\ddot{\theta}), \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial \theta} = mgL\theta$$

y así,

$$\ddot{x} + L\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

Suponga que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos simples de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes

$$x = A\cos(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \psi)$$
$$\theta = B\cos(\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta} = -\omega^2 B\cos(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y dividiendo por $\cos(\omega t + \psi)$, tenemos:

$$-\omega^2(M + m)A - mL\omega^2 B = 0$$
$$-\omega^2 A - (\omega^2 L - g)B = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} -(M + m)\omega^2 & -mL\omega^2 \\ -\omega^2 & -(\omega^2 L - g) \end{vmatrix} = 0$$

o

$$\omega^2[(M + m)(\omega^2 L - g) - mL\omega^2] = 0$$

y por consiguiente,

$$\omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g(M + m)}{LM}} \text{ rad/seg}$$

Como una de las frecuencias naturales del sistema es igual a cero, este es un sistema semi-definido. En esta frecuencia el sistema tiene movimiento de traslación pero no tiene oscilación.

$M\omega^2 L - Mg + m\omega^2 L - mg - mL\omega^2$

$M(\omega^2 L - g) + m(\omega^2 L - g - \omega^2 L)$

$\omega^2 [M(\omega^2 L - g) - mg]$

$\omega^2 (M\omega^2 L - Mg - mg) = 0$

$\omega^2 [M\omega^2 L - (M+m)g] = 0$

Problemas propuestos

$M\omega^2 L = (M+m)g$

$\omega^2 = \sqrt{\frac{(M+m)g}{ML}}$

ECUACION DE MOVIMIENTO

46. Deduzca las ecuaciones de movimiento del sistema mostrado en la figura 2-55. El cilindro circular tiene una masa m y un radio r y rueda sin deslizar dentro de la acanaladura circular de radio R.

Resp. $(M + m)\ddot{x}_1 + 2kx_1 + m(R - r)\ddot{\theta} = 0$

$$\frac{3(R - r)}{2}\ddot{\theta} + g\theta + \ddot{x}_1 = 0$$

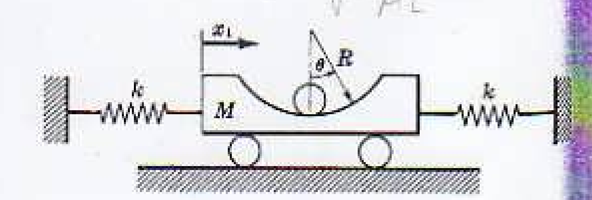


Fig. 2-55

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

47. Dos péndulos idénticos están rígidamente unidos a los extremos de un eje, el cual tiene una rigidez torsional K, como se muestra en la figura 2-56. Las masas de los discos de los péndulos son iguales a m y la longitud de las varillas (que son rígidas y sin peso) es L. Suponiendo que el eje descansa sobre un cojinete sin fricción, deduzca las ecuaciones de movimiento del sistema.

Resp. $mL^2\ddot{\theta}_1 + (mgL + K)\theta_1 - K\theta_2 = 0$
$mL^2\ddot{\theta}_2 + (mgL + K)\theta_2 - K\theta_1 = 0$

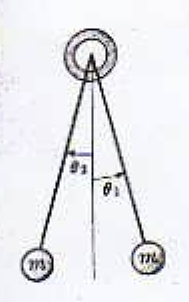
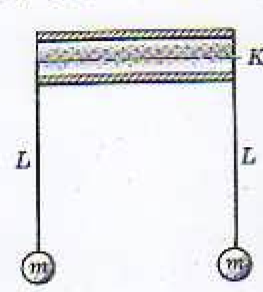





Fig. 2-56

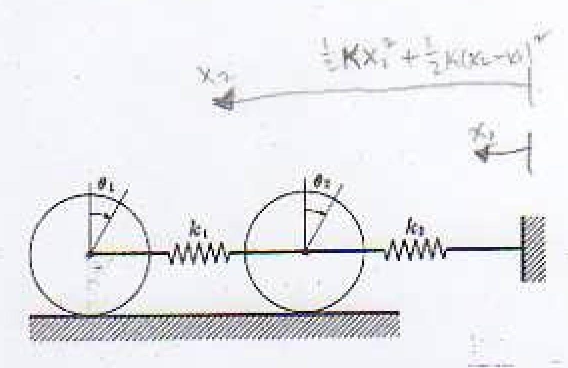


Fig. 2-57

48. La figura 2-57 muestra dos cilindros circulares idénticos de masa m y radio r unidos por medio de un resorte k_1. Si los cilindros pueden rodar libremente sobre la superficie horizontal, deduzca las ecuaciones de movimiento del sistema.

Resp. $(3m/2)\ddot{\theta}_1 + k_1\theta_1 - k_1\theta_2 = 0$
$(3m/2)\ddot{\theta}_2 + (k_1 + k_2)\theta_2 - k_1\theta_1 = 0$

ECUACION DE FRECUENCIA

49. Deduzca la ecuación de frecuencia del sistema mostrado en la figura 2-58. El peso de las poleas se supone despreciable.

Resp. $(m_1 + m_2)\omega^4 - (k_1m_2 + k_2m_1 + 4k_2m_2)\omega^2 + k_1k_2 = 0$

50. Un bloque rectangular de masa m está soportado por medio de cuatro resortes colocados en sus esquinas, como se muestra en la figura 2-59. Determine la ecuación de frecuencia, si únicamente es permitido el movimiento en el plano vertical.

Resp. $J_0m\omega^4 - (2k_xJ_0 + 2k_xmh^2 + 2k_ymb^2)\omega^2 + 4k_xk_yb^2 = 0$, donde J_0 es el momento de inercia del bloque con respecto a su centro de masa.

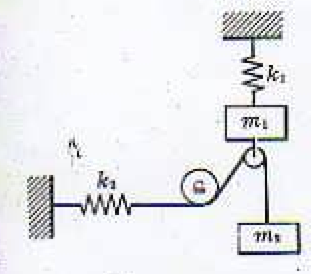




Fig. 2-58

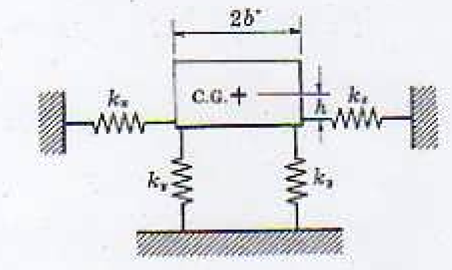


Fig. 2-59

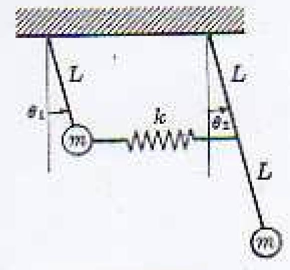


Fig. 2-60

51. Encuentre la ecuación de frecuencia del péndulo acoplado que se muestra en la figura 2-60.

Resp. $4mL^2\omega^4 - (6mLg + 5kL^2)\omega^2 + (2mg + 3Lgk) = 0$

52. Una varilla rígida sin peso que tiene dos masas m fijas en sus extremos, está unida a dos resortes, como se muestra en la figura 2-61. Deduzca una expresión para la ecuación de frecuencia del sistema.

Resp. $J_0m\omega^4 - (k_1 + k_2)J_0 + (k_1L_1 + k_2L_2)m\omega^2 + k_1k_2(L_1 + L_2)^2 = 0$, donde J_0 es el momento de inercia de la varilla con respecto a su centro de gravedad O.

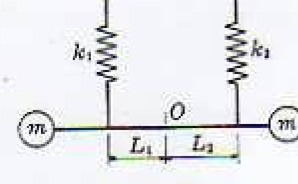


Fig. 2-61

FRECUENCIAS NATURALES

53. En la figura 2-62 suponga que la tensión en el alambre permanece constante cuando los ángulos de oscilación son pequeños. Deduzca las expresiones de las frecuencias naturales.
Resp. $\omega_1 = \sqrt{T/mL}$, $\omega_2 = 1{,}42\sqrt{T/Lm}$ rad/seg

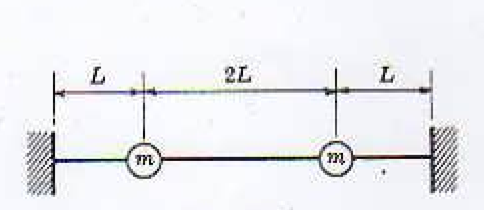


Fig. 2-62

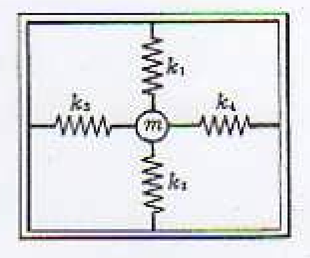


Fig. 2-63

54. La masa m está suspendida dentro de un marco rígido por medio de cuatro resortes, como se muestra en la figura 2-63. Determine las frecuencias naturales de vibración.
Resp. $\omega_1 = \sqrt{(k_1 + k_2)/m}$, $\omega_2 = \sqrt{(k_3 + k_4)/m}$ rad/seg

55. Calcule las frecuencias naturales del sistema general masa-resorte de dos grados de libertad, que se muestra en la figura 2-64. $k_1 = 3$, $k_2 = 5$ y $k_3 = 2$ lb/pul; y los pesos de m_1 y m_2 son 6 y 4 lb, respectivamente.
Resp. $\omega_2 = 2{,}59$, $\omega_1 = 0{,}49$ rad/seg

56. Dos cilindros circulares idénticos están unidos como se muestra en la figura 2-65. Determine las frecuencias naturales del sistema.
Resp. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{4k/3m}$ rad/seg

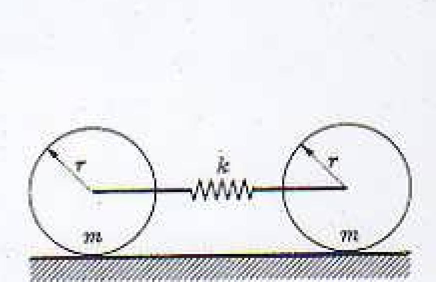


Fig. 2-65

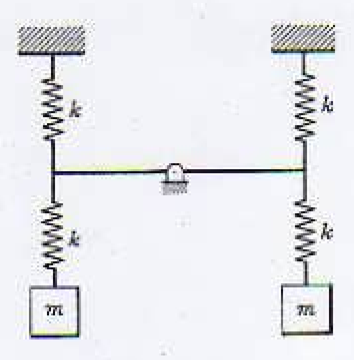


Fig. 2-66

57. Suponiendo que la varilla de conexión no tiene peso, determine las frecuencias de oscilación del sistema mostrado en la figura 2-66.
Resp. $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/2m}$ rad/seg

58. Calcule las frecuencias naturales del sistema mostrado en la figura 2-67.
Resp. $\omega_1 = 1{,}96\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 2{,}16\sqrt{k/m}$ rad/seg

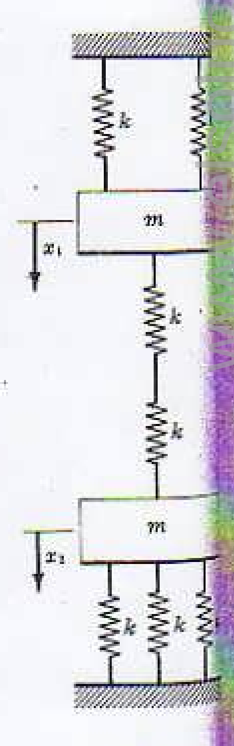


Fig. 2-67

59. Una barra de masa M es soportada por dos resortes de módulos k y $2k$ respectivamente, como se muestra en la figura 2-68. Si el movimiento de la barra se limita al plano del papel, encuentre las frecuencias naturales.
Resp. $\omega_1 = 1{,}64\sqrt{k/M}$, $\omega_2 = 3{,}08\sqrt{k/M}$ rad/seg

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

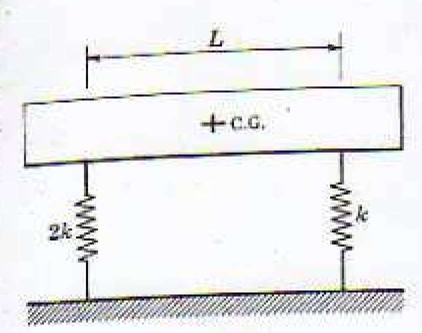


Fig. 2-68

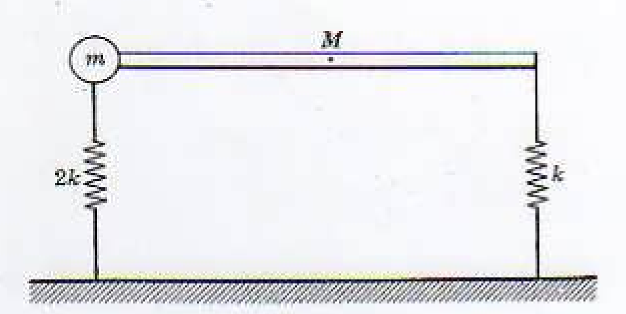


Fig. 2-69

60. En el sistema que se muestra en la figura 2-64 suponga que $m_1 = m_2 = 10$ lb y que la rigidez de cada uno de los resortes es $k = 1000$ lb/pul. Calcule las frecuencias.
Resp. $\omega_1 = 10.00$, $\omega_2 = 17.3$ rad/seg

61. Si el movimiento de la varilla se limita al plano vertical, encuentre las frecuencias del sistema que se muestra en la figura 2-69.
Resp. $\omega_1 = 0{,}85\sqrt{2k/(m+M)}$ y $\omega_2 = 1{,}81\sqrt{2k/(m+M)}$ rad/seg, donde M es la masa de la varilla.

62. Si $m_1 = m_2 = 1$ lb-seg²/pul, $k_1 = 200$ y $k_2 = 400$ lb/pul, encuentre las frecuencias del sistema que se muestra en la figura 2-70.
Resp. $\omega_1 = 9{,}37$, $\omega_2 = 30{,}2$ rad/seg

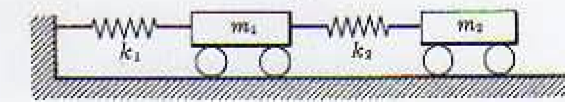


Fig. 2-70

MODOS PRINCIPALES DE VIBRACION

63. Si $m_1 = m_2 = 10/386$ lb-seg²/pul y $k_1 = k_2 = k_3 = 1000$ lb/pul, determine el movimiento general del sistema que se muestra en la figura 2-64.
Resp.
$$x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(10t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(17t + \psi_2)$$
$$x_2(t) = A_1 \operatorname{sen}(10t + \psi_1) - A_2 \operatorname{sen}(17t + \psi_2)$$

64. Para el sistema que se muestra en la figura 2-64, $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$ lb-seg²/pie; $k_1 = 20$, $k_2 = 10$ y $k_3 = 30$ lb/pie y se imparte a la masa m_1 una velocidad inicial de 10 pies/seg. ¿Cuál es el movimiento general de las masas?
Resp.
$$x_1(t) = 1{,}97 \operatorname{sen}(4.05t) - 0{,}35 \operatorname{sen}(5.81t)$$
$$x_2(t) = 1{,}42 \operatorname{sen}(4.05t) - 0{,}97 \operatorname{sen}(5.81t)$$

65. En el problema 62 calcule $x_1(t)$ y $x_2(t)$ para las siguientes condiciones iniciales:
(*a*) $x_1(0) = 0{,}3$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$
(*b*) $x_1(0) = 0{,}3$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 5{,}0$
Resp. (*a*)
$$x_1(t) = 0{,}114 \cos(9.37t) + 0{,}186 \cos(30{,}2t)$$
$$x_2(t) = 0{,}145 \cos(9.37t) - 0{,}145 \cos(30{,}2t)$$
(*b*)
$$x_1(t) = -0{,}117 \cos(9.37t + 167^\circ) - 0{,}186 \cos(30{,}2t - 177^\circ)$$
$$x_2(t) = -0{,}149 \cos(9.37t + 167^\circ) + 0{,}145 \cos(30.2t - 177^\circ)$$

66. Determine las condiciones iniciales apropiadas para que el sistema que se trató en el problema 65 vibre en el primero y segundo modos de vibración.
Resp. Primer modo:
(1) $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_2(0) = 1{,}28x_1(0)$
(2) $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 1{,}28\dot{x}_1(0)$
(3) $x_2(0) = 1{,}28x_1(0)$, $\dot{x}_2(0) = 1{,}28\dot{x}_1(0)$

Segundo modo:
(1) $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_2(0) = -0{,}78x_1(0)$
(2) $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = -0{,}78\dot{x}_1(0)$
(3) $x_2(0) = -0{,}78x_1(0)$, $\dot{x}_2(0) = -0{,}78\dot{x}_1(0)$

67. Una barra rígida de sección uniforme, que tiene una longitud $4L$ y una masa M, está suspendida por medio de dos resortes de rigidez k, como se muestra en la figura 2-71. Determine las condiciones iniciales apropiadas para que el sistema vibre en el primero y segundo modos principales de vibración.

Resp. Primer modo: (1) $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_1(0) = -2.81Lx_2(0)$
(2) $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = -2.81L\dot{x}_2(0)$
(3) $x_1(0) = -2.81Lx_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = -2.81L\dot{x}_2(0)$

Segundo modo: (1) $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, $x_1(0) = 0.47Lx_2(0)$
(2) $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0.47L\dot{x}_2(0)$
(3) $x_1(0) = 0.47Lx_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = 0.47L\dot{x}_2(0)$

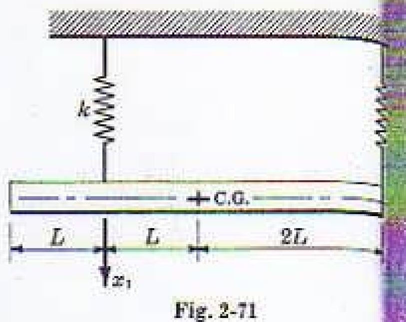


Fig. 2-71

COORDENADAS DE ACOPLAMIENTO

68. Dos masas iguales m_1 y m_2 están fijadas a un alambre, el cual está sometido a una gran tensión inicial, como se muestra en la figura 2-72. Determine las coordenadas principales del sistema. *Resp.* $p_1 = y_1 + y_2$, $p_2 = -y_1 -$



Fig. 2-72

69. En el problema 19 determine los términos de acoplamiento. *Resp.* $a^2k(\theta_2 - \theta_1)$, término de acoplamiento está

70. En el problema 24 determine los términos de acoplamiento.
Resp. $m_2 a_1 L \ddot{\theta}_1$, $m_1 a_1 L \ddot{\theta}_2$; ambos son términos de acoplamiento dinámico

ECUACION DE LAGRANGE

71. Un péndulo doble está unido a cuatro resortes de igual rigidez, como se muestra en la figura 2-73. Encuentre sus frecuencias por medio de la ecuación de Lagrange, para ángulos de oscilación pequeños.
Resp. $\omega_1 = \sqrt{2k/m + 3.12g/L}$, $\omega_2 = \sqrt{2k/m + 0.58g/L}$ rad/seg

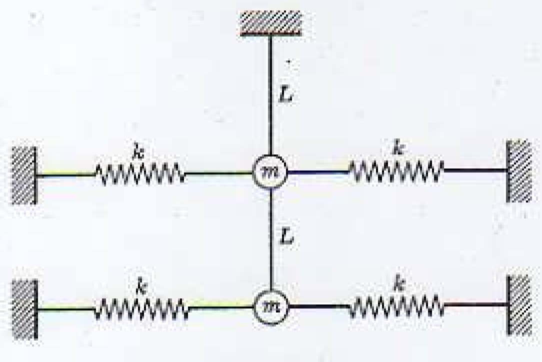


Fig. 2-73

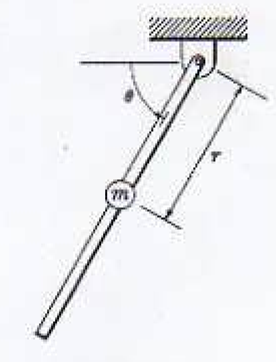


Fig. 2-74

72. Una pequeña masa m puede deslizar libremente sobre una varilla homogénea de sección uniforme de masa M y longitud L, la cual está pivotada en uno de sus extremos, como se muestra en la figura 2-74. Deduzca las ecuaciones de movimiento por medio de la ecuación de Lagrange.
Resp. $(ML^2 + mr^2)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - (mr + ML)g\cos\theta = 0$
$m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + mg(1 - \operatorname{sen}\theta) = 0$

73. Un cilindro homogéneo circular de masa M y radio R rueda sin deslizar en el interior de una superficie circular de radio $3R$. Una pequeña masa m, suspendida por dos resortes iguales de módulo k, está inicialmente en el centro del cilindro, en la posición de equilibrio, como se muestra en la figura 2-75. Deduzca las expresiones de las ecuaciones de movimiento del sistema utilizando la ecuación de Lagrange.

Resp. $4(MR^2 + J_o + mR^2)\ddot{\theta} + 2(M+m)gR\theta + 2mR\ddot{r} - 2mgr = 0$

$m\ddot{r} + 2kr + 2mR\ddot{\theta} - 2mg\theta = 0$

donde J_o es el momento de inercia del cilindro

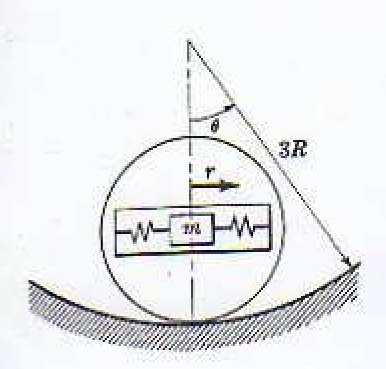


Fig. 2-75

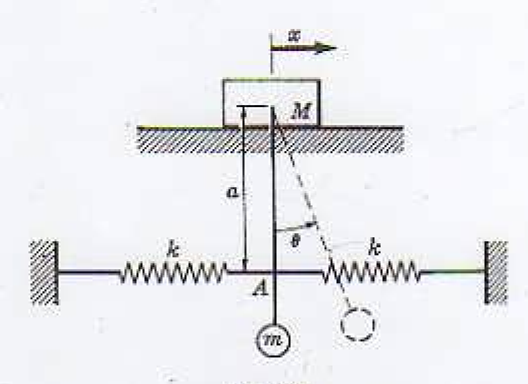


Fig. 2-76

74. Una partícula de masa m se está moviendo sobre un plano horizontal bajo la acción de una fuerza de atracción, la cual es una función del desplazamiento, es decir, que $F(r) = f(1/r^2)$. Determine las ecuaciones de movimiento de la partícula, utilizando la ecuación de Lagrange.

Resp. $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$

$m\ddot{r} + k/r^2 - mr\dot{\theta}^2 = 0$

75. Un bloque de masa M se mueve a lo largo de un plano horizontal liso y conduce un péndulo simple de longitud L y masa m, como se muestra en la figura 2-76. En el punto A están unidos al péndulo dos resortes iguales de módulo k. Determine las ecuaciones de movimiento del sistema para pequeñas oscilaciones alrededor del punto de equilibrio utilizando la ecuación de Lagrange.

Resp. $(M+m)\ddot{x} + 2kx + mL\ddot{\theta} + 2ak\theta = 0$

$mL^2\ddot{\theta} + (mgL + 2ka^2)\theta + mL\ddot{x} + 2akx = 0$

SISTEMA EQUIVALENTE

76. Un péndulo simple de longitud L y masa m está suspendido por dos resortes iguales de constante k, como se muestra en la figura 2-77. Si el movimiento del péndulo se restringe al plano del papel, demuestre que el sistema es equivalente a un péndulo matemático de longitud $(L + mg/k)$.

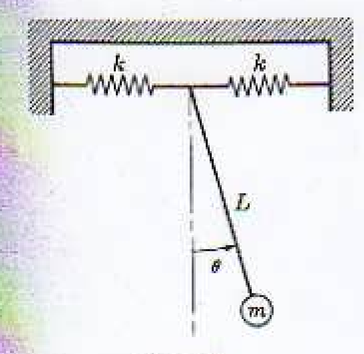


Fig. 2-77

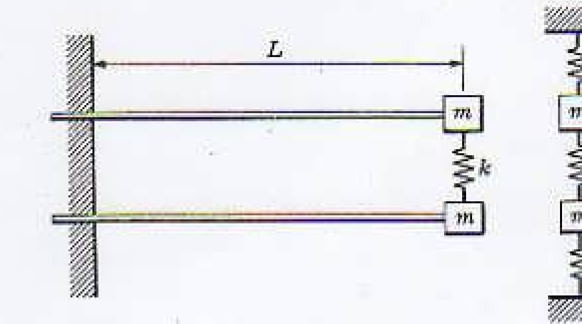


Fig. 2-78

77. Suponiendo que las vigas en voladizo no tienen peso, encuentre el sistema equivalente masa-resorte del sistema q muestra en la figura 2-78. *Resp.* $k_1 = k_2 = 3EI/L^3$

78. Para el sistema que se muestra en la figura 2-79 determine un sistema dinámicamente equivalente y su frecu Suponga que J_0 es el momento de inercia de la polea.
Resp. Sea $x = ax_e$; entonces $k_e = a^2(r/R)^2k$, $M_e = (M + J_0/R^2)(\dot{x}^2/\dot{x}_e^2)$, y $\omega_n = \sqrt{kr^2/(MR^2+J_0^2)}$ rad

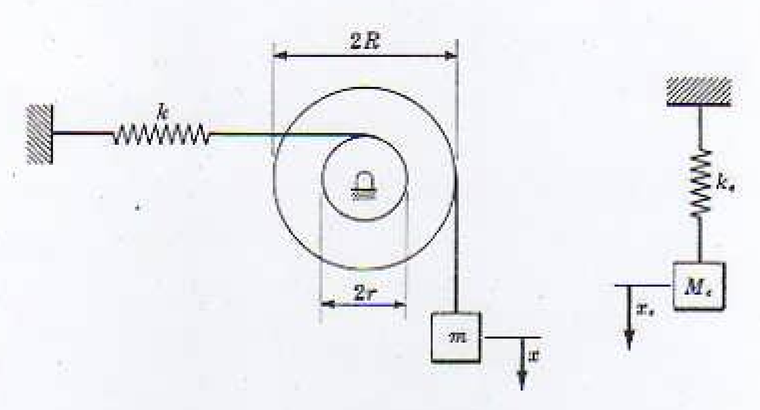


Fig. 2-79

VIBRACION FORZADA

79. Determine la vibración del estado estacionario del sistema que se muestra en la figura 2-80.

$$Resp.\quad x_1 = \frac{F_1[(k_2+k_3)/m_1m_2 - \omega^2/m_1] + F_2k_2/m_1m_2}{m_1m_2\omega^4 - [m_2(k_1+k_2) + m_1(k_2+k_3)]\omega^2 + k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}\cos\omega t$$

$$x_2 = \frac{F_2[(k_1+k_2)/m_1m_2 - \omega^2/m_2] + F_1k_2/m_1m_2}{m_1m_2\omega^4 - [m_2(k_1+k_2) + m_1(k_2+k_3)]\omega^2 + k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}\cos\omega t$$



Fig. 2-80

80. Un sistema simple masa-resorte tiene una vibración forzada. El módulo del resorte es 1000 lb/pul y el peso de la masa es 10 lb. La función fuerza es 10 cos 250t. Determine la constante elástica y el peso de un absorbedor tal, que las frecuencias naturales del sistema completo difieran por lo menos en un 25% de la frecuencia impresa.
Resp. k = 560 lb/pul, W = 3,48 lb

81. Un compresor de aire, que gira a una velocidad constante de 1200 rpm, tiene una gran amplitud de vibración. El peso del compresor es 500 lb y el compresor tiene un desbalanceamiento de 1,00 pul-lb. Si se agrega al sistema un absorbedor de vibraciones, calcule el peso y la constante elástica de éste, si las frecuencias naturales del sistema completo deben diferir por lo menos en un 10% de la frecuencia impresa. *Resp.* W = 22,2 lb, k = 824 lb/pul

82. Demuestre que el principio de la ortogonalidad se satisface en los problemas 3 y 5.

Capítulo 3

Varios grados de libertad

INTRODUCCION

Cuando se necesitan n coordenadas independientes para determinar las posiciones de las masas de un sistema, el sistema es de n grados de libertad. Por ejemplo, un bloque soportado por resortes puede tener seis grados de libertad: tres de traslación y tres de rotación. El sistema que se muestra en la figura 3-1 es de múltiples grados de libertad.

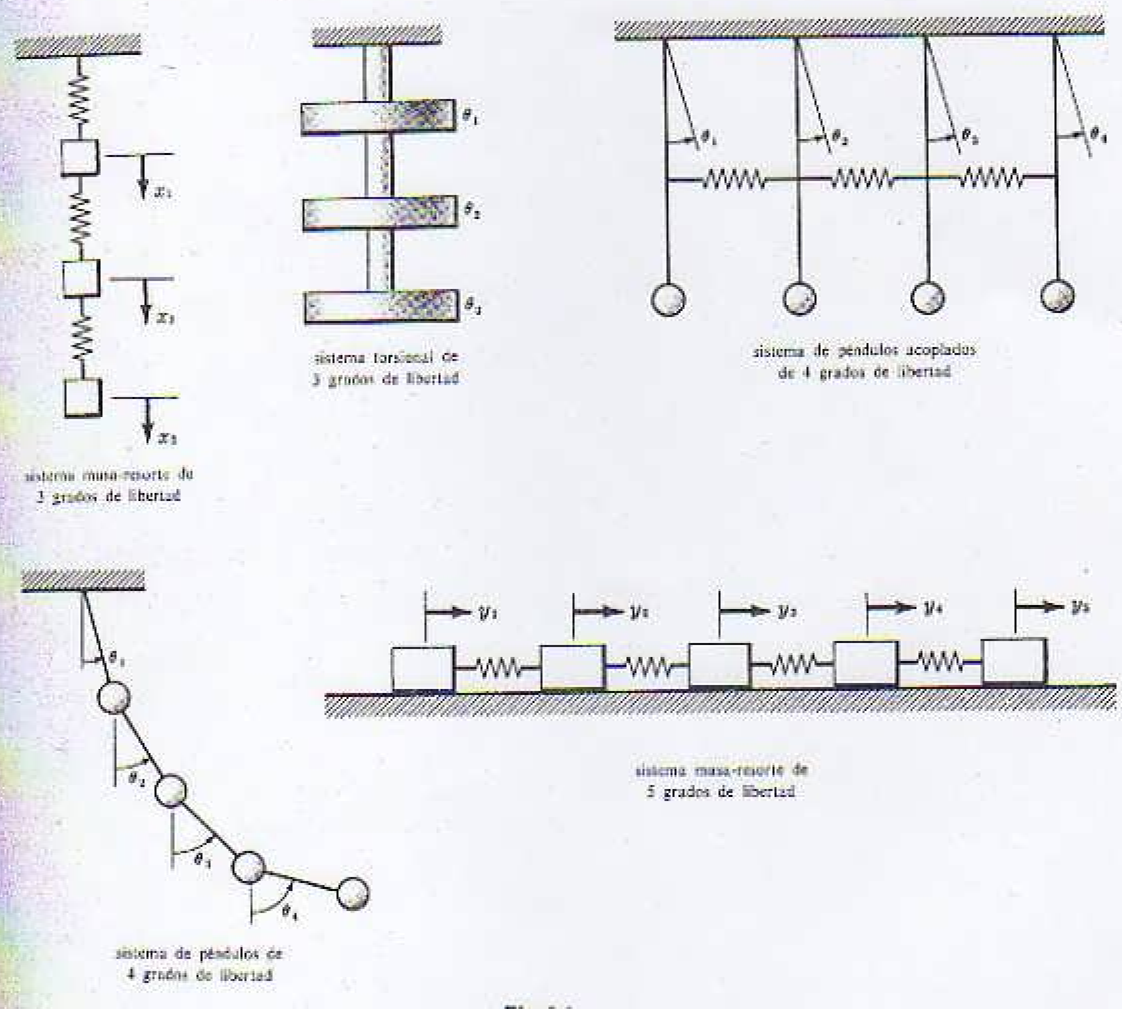


Fig. 3-1

En principio, el análisis vibracional de un sistema de n grados de libertad no es muy diferente del de dos grados de libertad; se pueden emplear vías y métodos análogos para hacer sus análisis y hallar sus soluciones. Sin embargo, debido al gran número de posibilidades que existen, la labor de encontrar las frecuencias naturales y evaluar las respuestas, generalmente requiere mucho más trabajo matemático.

ECUACION DE MOVIMIENTO

El movimiento de un sistema vibratorio de n grados de libertad se representa por n ecuaciones diferenciales de movimiento, las cuales se pueden obtener por la ley del movimiento de Newton, por la ecuación de Lagrange o por el *método de los coeficientes de influencia*. Como las ecuaciones de movimiento no son enteramente independientes, se necesita la evaluación completa de determinantes de orden n para obtener la solución simultánea de estas ecuaciones. La evaluación de tales determinantes producirá todas las frecuencias naturales del sistema.

Otros métodos utilizados son: el *método Stodola*, el *método de Holzer* y la *iteración matricial*. Estos son medios numéricos más directos, que han sido empleados frecuentemente en el análisis de sistemas vibratorios de múltiples grados de libertad.

COEFICIENTES DE INFLUENCIA

Un *coeficiente de influencia*, denotado por α_{12}, se define como la deflexión estática del sistema en la posición 1, debida a una fuerza unitaria aplicada en la posición 2, cuando esta fuerza unitaria es la única fuerza que actúa. Por consiguiente, el método de los coeficientes de influencia es ventajoso para calcular todas las deflexiones producidas por las fuerzas aplicadas y para establecer las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema.

Se puede demostrar que la siguiente expresión es verdadera:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

donde α_{ij} = deflexión en la posición i debida a una fuerza unitaria aplicada en la posición j.
α_{ji} = deflexión en la posición j debida a una fuerza unitaria aplicada en la posición i.

Este es el *teorema recíproco de Maxwell*.

Un coeficiente de influencia α_{ij} también puede interpretarse como el desplazamiento angular en la coordenada i debido a un momento torsional unitario j, para movimientos rotacionales.

MATRICES

El uso de matrices en el análisis vibracional no sólo simplifica el trabajo, sino que también ayuda a comprender el procedimiento utilizado en la solución. Esto es particularmente cierto en sistemas de varios grados de libertad.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento de un sistema de n masas puede expresarse en general así:

$$\begin{aligned}
m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + \cdots + m_{1n}\ddot{q}_n + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + k_{1n}q_n &= 0\\
m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + \cdots + m_{2n}\ddot{q}_n + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + \cdots + k_{2n}q_n &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
m_{n1}\ddot{q}_1 + m_{n2}\ddot{q}_2 + \cdots + m_{nn}\ddot{q}_n + k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + k_{nn}q_n &= 0
\end{aligned}$$

En notación matricial, estas ecuaciones diferenciales se escriben así:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n}\\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \cdot\\ \ddot{q}_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1\\ q_2\\ \cdot\\ q_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\ \cdot\\ 0\end{bmatrix}$$

o se pueden expresar simplemente como:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

donde $[M]$ se llama la *matriz inercia* y $[K]$ la *matriz rigidez*.

La ecuación matricial simplificada puede expresarse también en la forma:

$$\{\ddot{q}\} + [M]^{-1}[K]\{q\} = 0$$

o

$$\{\ddot{q}\} + [C]\{q\} = 0$$

donde $[C]$ se llama la *matriz dinámica*.

Las frecuencias naturales se obtienen de la ecuación característica $|I - C| = 0$, deducida de la teoría de la matriz λ: $[I - C] = 0$, donde I es la matriz diagonal unitaria y C la matriz dinámica.

Sean p_i las coordenadas principales. Entonces,

$$q_1 = \alpha_{11}p_1 + \alpha_{12}p_2 + \cdots + \alpha_{1n}p_n$$
$$q_2 = \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 + \cdots + \alpha_{2n}p_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$q_n = \alpha_{n1}p_1 + \alpha_{n2}p_2 + \cdots + \alpha_{nn}p_n$$

En notación matricial esto se convierte en:

$$[q] = [\alpha][p] \qquad \text{y} \qquad [p] = [\alpha]^{-1}[q]$$

donde $[\alpha]$ se llama la *matriz de trasformación*.

ITERACION MATRICIAL

Este es un procedimiento iterativo que conduce a los modos principales de vibración de un sistema y a sus frecuencias naturales.

Los desplazamientos de las masas se calculan aproximadamente y con base en estos desplazamientos se escribe la ecuación matricial del sistema. Los coeficientes de influencia del sistema se remplazan en la ecuación matricial, la cual es entonces desarrollada. La normalización del desplazamiento y el desarrollo de la matriz se repiten. Este proceso se continúa hasta que el primer modo se repita, con el grado de exactitud que se desee.

Para los modos y frecuencias naturales superiores se utiliza el principio de la ortogonalidad con el fin de obtener una nueva ecuación matricial, la cual es libre de cualquier modo inferior. El procedimiento iterativo se repite.

METODO STODOLA

El método Stodola es un *proceso iterativo* utilizado para el cálculo de los modos principales y de las frecuencias naturales de sistemas vibrantes no amortiguados. Este es un *medio físico* y no es necesario deducir la ecuación diferencial de movimiento.

En general, la fuerza de inercia es máxima en el mismo instante en que la deflexión es máxima y está en sentido opuesto a la deflexión. En otras palabras, la fuerza de inercia se interpreta como la carga dinámica. Cuando el sistema está vibrando en uno de sus modos principales con frecuencia natural ω, obra según las fuerzas de inercia $-m_i\ddot{x}_i$, donde $x_i = A_i$ sen ωt y por tanto,

$$-m_i\ddot{x}_i = \omega^2 m_i x_i$$

Inicialmente se supone la configuración de un modo principal y se calculan las correspondientes fuerzas de inercia y elásticas. Entonces las deflexiones elásticas se determinan con base en estas fuerzas elásticas. Estas deflexiones se emplean para comenzar la siguiente iteración. Si la configuración supuesta resulta ser un modo principal, las deflexiones calculadas serán iguales a las que se supusieron en un principio. Si las deflexiones supuestas son diferentes de las correspondientes a un modo principal, el proceso iterativo se debe repetir hasta que converja.

METODO HOLZER

El método Holzer es un *método tabular* que se emplea para determinar la frecuencia natura vibraciones libres o forzadas, con amortiguamiento o sin él. El método se basa en suposiciones suce de la frecuencia natural del sistema, cada una de las cuales se hace con base en el cálculo de la confi ración regida por la frecuencia supuesta inmediatamente antes. Este método se puede utilizar calcular todas las frecuencias naturales del sistema y cada cálculo es completamente independi de los otros. El método Holzer es particularmente útil para calcular las frecuencias de vibraci torsionales en ejes.

Para sistemas con ambos extremos libres tenemos:

$$x_i = x_{i-1} - (\omega^2/k_i)\sum_{1}^{i-1} m_j x_j$$

donde x, ω, m y k son el desplazamiento, la frecuencia natural, la masa y la constante elástica sistema, respectivamente.

Para sistemas con un extremo fijo y uno libre,

$$x_i = x_{i-1} - (\omega^2/k_i)\sum_{1}^{i-1} m_j x_j$$

Para sistemas con ambos extremos fijos,

$$x_i = x_{i-1} + (1/k_i)\left[k_1 x_1 - \omega^2 \sum_{1}^{i-1} m_j x_j\right]$$

Para un valor supuesto de ω, el proceso comienza suponiendo una amplitud unitaria de vi ción para la primera masa. Luego se calculan las amplitudes y las fuerzas de inercia para todas demás masas. Para sistemas con extremos fijos, la amplitud de vibración de la última masa será c y para sistemas con extremos libres, la fuerza total de inercia es cero. Los demás valores (ampli o fuerza de inercia) para cada una de las frecuencias supuestas, se grafican contra los valores sup tos de la frecuencia natural para hallar las frecuencias verdaderas del sistema.

METODO DE LA IMPEDANCIA MECANICA

Ciertos problemas de vibraciones se resuelven ventajosamente por el método de la impedan mecánica, el cual hace uso del hecho de que las impedancias del resorte, el amortiguador y la m son respectivamente: k, $ic\omega$ y $-m\omega^2$. Este método producirá las respuestas del estado esta nario de vibraciones forzadas y nos orientará hacia la ecuación de frecuencia del sistema de vibra libre. La aplicación de este método puede reducirse a los *cuatro pasos* siguientes, para sistemas múltiples grados de libertad:

(1) Multiplique la amplitud de cada punto de unión o de empalme del sistema, por las impedan de los elementos unidos a él.

(2) Reste de esta cantidad los "términos de pérdida", los cuales pueden definirse como los produc de las impedancias de los elementos sujetos al empalme por las amplitudes de sus extre opuestos.

(3) Haga esta cantidad igual a cero para vibraciones libres e igual al valor máximo de la fuerza si soidal para vibraciones forzadas. Si se aplica más de una fuerza al empalme, se debe tomar valor apropiado de sus relaciones de fase.

(4) Resuelva las ecuaciones de las amplitudes de vibración. La expresión para la amplitud de ca empalme puede expresarse en la forma $F/(A+iB)$. El valor numérico de la amplitud $F/\sqrt{A^2+B^2}$ y el movimiento se retrasará con respecto a la fuerza un ángulo cuya tange es B/A.

PRINCIPIO DE LA ORTOGONALIDAD

Para un sistema de tres grados de libertad el principio de la ortogonalidad es:

$$m_1A_1A_2 + m_2B_1B_2 + m_3C_1C_2 = 0$$
$$m_1A_1A_3 + m_2B_1B_3 + m_3C_1C_3 = 0$$
$$m_1A_2A_3 + m_2B_2B_3 + m_3C_2C_3 = 0$$

donde las m son las masas del sistema; las A, las B y las C son las amplitudes de vibración en diferentes modos.

Para sistemas de n grados de libertad el principio de la ortogonalidad es:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = 0$$

donde $r \neq s$ son los modos principales de vibración del sistema.

Problemas resueltos

SISTEMAS DE TRES GRADOS DE LIBERTAD

1. Calcular las frecuencias naturales del sistema masa-resorte de tres grados de libertad que se muestra en la figura 3-2.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento se pueden obtener aplicando la ecuación $\Sigma F = ma$ a cada una de las masas.

$$4m\ddot{x}_1 = -3kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$2m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) - k(x_2 - x_3)$$
$$m\ddot{x}_3 = k(x_2 - x_3)$$

Cambiando el orden, obtenemos:

$$4m\ddot{x}_1 + 4kx_1 - kx_2 = 0$$
$$2m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_3 - kx_1 = 0$$
$$m\ddot{x}_3 + kx_3 - kx_2 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C\cos(\omega t + \psi).$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(4k - 4m\omega^2)A - kB = 0$$
$$-kA + (2k - 2m\omega^2)B - kC = 0$$
$$-kB + (k - m\omega^2)C = 0$$

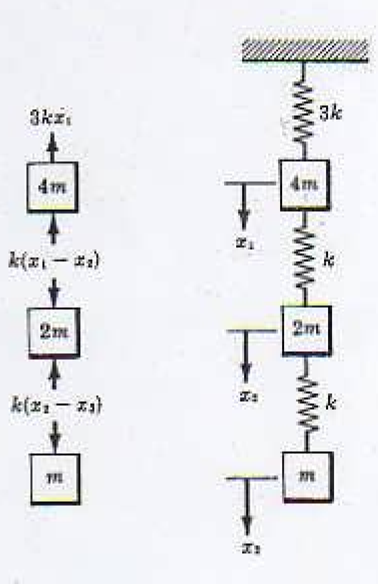


Fig. 3-2

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B y C:

$$\begin{vmatrix} (4k - 4m\omega^2) & -k & 0 \\ -k & (2k - 2m\omega^2) & -k \\ 0 & -k & (k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$(k - m\omega^2)(8m^2\omega^4 - 16km\omega^2 + 3k^2) = 0$$

y por tanto las frecuencias naturales son $\omega_1 = 0{,}46\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 1{,}34\sqrt{k/m}$ rad/seg.

2. Determinar la ecuación de frecuencia del sistema general masa-resorte de tres grados de libertad que se muestra en la figura 3-3.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento se pueden obtener aplicando la segunda ley de Newton a cada una de las masas.

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_3)$$
$$m_3\ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3$$



Fig. 3-3

Cambiando el orden obtenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - k_2x_1 = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 + (k_3 + k_4)x_3 - k_3x_2 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean,

$$x_1 = A \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C \text{ sen } (\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = 0$$
$$-k_2A + (k_2 + k_3 - m_2\omega^2)B - k_3C = 0$$
$$-k_3B + (k_3 + k_4 - m_3\omega^2)C = 0$$

La ecuación de frecuencia del sistema se encuentra igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B y C, es decir,

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4 - m_3\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\omega^6 - [(k_1 + k_2)/m_1 + (k_2 + k_3)/m_2 + (k_3 + k_4)/m_3]\omega^4$$
$$+ [(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1)/m_1m_2 + (k_2k_3 + k_3k_4 + k_4k_2)/m_2m_3 + (k_1 + k_2)(k_3 + k_4)/m_3m_1]\omega^2$$
$$- (k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1 + k_4k_1k_2)/m_1m_2m_3 = 0$$

3. Calcular las frecuencias naturales de tres masas diferentes, las cuales están colocadas de forma que se encuentran separadas por distancias iguales a la cuarta parte de la longitud total de la cuerda que se muestra en la figura 3-4, la cual está sometida a alta tensión.

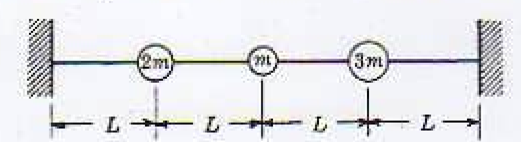


Fig. 3-4

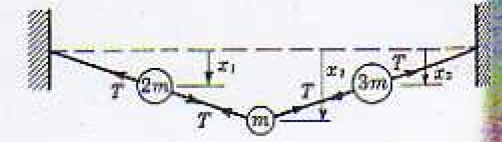


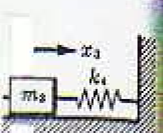
Fig. 3-5

Supongamos que la tensión en la cuerda es T y permanece constante para ángulos de oscilación pequeños. Consideremos la masa $2m$, tal como se muestra en la figura 3-5. Aplicando $\Sigma F = ma$, tenemos:

$$2m\ddot{x}_1 = T\left[\frac{(x_2 - x_1)}{L}\right] - T\left[\frac{x_1}{L}\right]$$

$$m\ddot{x}_2 = -T\left[\frac{(x_2 - x_1)}{L}\right] - T\left[\frac{(x_2 - x_3)}{L}\right]$$

$$3m\ddot{x}_3 = T\left[\frac{(x_2 - x_3)}{L}\right] - T\left[\frac{x_3}{L}\right]$$



Supongamos que el movimiento de oscilación es periódico y está compuesto de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(2T/L - 2m\omega^2)A - (T/L)B = 0$$
$$-(T/L)A + (2T/L - m\omega^2)B - (T/L)C = 0$$
$$-(T/L)B + (2T/L - 3m\omega^2)C = 0$$

La frecuencia del sistema se obtiene, entonces, igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B y C, o sea,

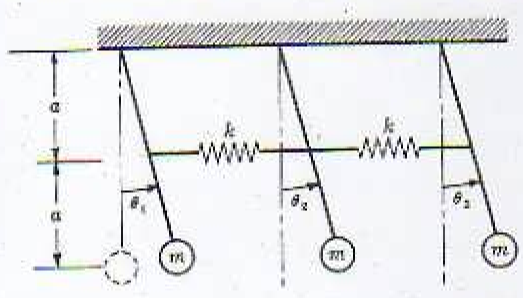
$$\begin{vmatrix} (2T/L - 2m\omega^2) & -T/L & 0 \\ -T/L & (2T/L - m\omega^2) & -T/L \\ 0 & -T/L & (2T/L - 3m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$6m^3\omega^6 - (22Tm^2/L)\omega^4 + (19T^2m/L^2)\omega^2 - 4T^3/L^3 = 0$$

de la cual $\omega_1 = 0{,}56\sqrt{T/Lm}$, $\omega_2 = 0{,}83\sqrt{T/Lm}$, $\omega_3 = 1{,}59\sqrt{T/Lm}$ rad/seg.

4. Calcular las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-6. Los resortes de acoplamiento no sufren ningún esfuerzo cuando los péndulos están en las posiciones verticales.



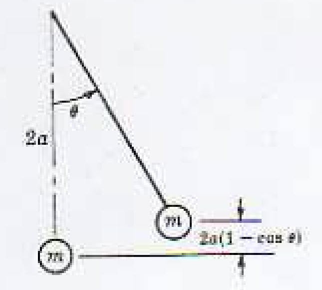


Fig. 3-6

La energía cinética del sistema es:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m(2a\dot{\theta}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m(2a\dot{\theta}_2)^2 + \tfrac{1}{2}m(2a\dot{\theta}_3)^2$$

donde $2a$ es la longitud de todos los péndulos y los ángulos θ son los desplazamientos angulares.

La energía potencial del sistema es:

$$\text{E.P.} = \; = 2mga[(1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2) + (1 - \cos\theta_3)] + \tfrac{1}{2}k(a\theta_2 - a\theta_1)^2 + \tfrac{1}{2}k(a\theta_3 - a\theta_2)^2$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} = 0$$

donde q_i, las coordenadas generalizadas, son θ_1, θ_2, y θ_3 para este sistema. Ahora,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{\theta}_1} = 4ma^2\ddot{\theta}_1, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \theta_1} = 0, \qquad \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial \theta_1} = 2mga \operatorname{sen}\theta_1 - ka(a\theta_2 - a\theta_1)$$

y por tanto la primera ecuación de movimiento es:

$$4ma^2\ddot{\theta}_1 + (2mag + ka^2)\theta_1 - ka^2\theta_2 = 0$$

en donde se ha supuesto que $\operatorname{sen}\theta_i \doteq \theta$ para oscilaciones pequeñas. Análogamente, las demás ecuaciones de movimiento son:

$$4ma^2\ddot{\theta}_2 + (2mag + 2ka^2)\theta_2 - ka^2\theta_1 - ka^2\theta_3 = 0$$
$$4ma^2\ddot{\theta}_3 + (2mag + ka^2)\theta_3 - ka^2\theta_2 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes cuencias. Sean

$$\theta_1 = A\ \text{sen}(\omega t+\psi), \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\ \text{sen}(\omega t+\psi)$$
$$\theta_2 = B\ \text{sen}(\omega t+\psi), \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\ \text{sen}(\omega t+\psi)$$
$$\theta_3 = C\ \text{sen}(\omega t+\psi), \qquad \ddot{\theta}_3 = -\omega^2 C\ \text{sen}(\omega t+\psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y simplificando, tenemos:

$$(2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2)A - (ka^2)B = 0$$
$$-(ka^2)A + (2mag + 2ka^2 - 4ma^2\omega^2)B - (ka^2)C = 0$$
$$-(ka^2)B + (2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2)C = 0$$

y la ecuación de frecuencia es:

$$\begin{vmatrix} (2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2) & -ka^2 & 0 \\ -ka^2 & (2mag + 2ka^2 - 4ma^2\omega^2) & -ka^2 \\ 0 & -ka^2 & (2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos el determinante para obtener:

$$(2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2)[(2mag + ka^2 - 4ma^2\omega^2)(2mag + 2ka^2 - 4ma^2\omega^2) - 2k^2a^4] = 0$$

Y resolviendo encontramos que $\omega_1 = \sqrt{g/2a}$, $\omega_2 = \sqrt{g/2a + k/4m}$, $\omega_3 = \sqrt{g/2a + 3k/4m}$ rad/seg.

5. Determinar las frecuencias naturales del sistema masa-resorte de tres grados de libertad qu muestra en la figura 3-7.

Empleando $\Sigma F = ma$, obtenemos:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_3) - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)$$
$$m\ddot{x}_3 = -kx_3 - k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2)$$

o

$$m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 - kx_3 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - kx_3 - kx_1 = 0$$
$$m\ddot{x}_3 + 3kx_3 - kx_1 - kx_2 = 0$$

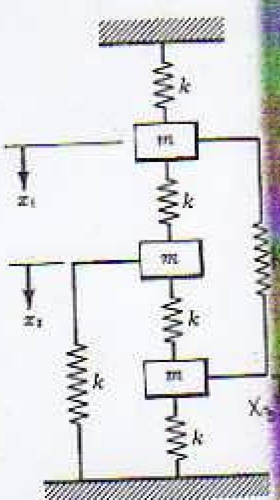


Fig. 3-7

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A\cos(\omega t+\psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t+\psi)$$
$$x_2 = B\cos(\omega t+\psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t+\psi)$$
$$x_3 = C\cos(\omega t+\psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C\cos(\omega t+\psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y simplificando, obtenemos:

$$(3k - m\omega^2)A - kB - kC = 0$$
$$-kA + (3k - m\omega^2)B - kC = 0$$
$$-kA - kB + (3k - m\omega^2)C = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene de:

$$\begin{vmatrix} (3k - m\omega^2) & -k & -k \\ -k & (3k - m\omega^2) & -k \\ -k & -k & (3k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Y desarrollando el determinante obtenemos:

$$\omega^6 - (9k/m)\omega^4 + (24k^2/m^2)\omega^2 - (16k^3/m^3) = 0$$

de la cual $\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \omega_3 = 2\sqrt{k/m}$ rad/seg. Como dos de las frecuencias naturales del sistema son igual dice que el sistema es *degenerado*.

6. Deducir las ecuaciones de movimiento del péndulo triple que se muestra en la figura 3-8, empl do la ecuación de Lagrange. ¿Cuáles son las frecuencias de oscilación? $L_1 = L_2 = L_3 =$ $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

La energía cinética del péndulo triple es:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

donde $v_1^2 = (L\dot{\theta}_1)^2$

$$v_2^2 = (L\dot{\theta}_1)^2 + (L\dot{\theta}_2)^2 + 2L^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1)$$
$$= L^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) = L^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$$

$$v_3^2 = v_2^2 + (L\dot{\theta}_3)^2 + 2v_2(L\dot{\theta}_3)\cos(\theta_3 - \theta_2 + \theta_1)$$
$$= L^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3)$$

y las velocidades de los discos de los péndulos se indican en la figura 3-9. Entonces,

$$\text{E.C.} = (mL^2/2)(3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3)$$

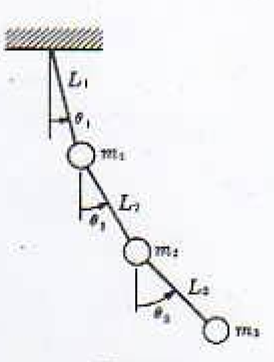
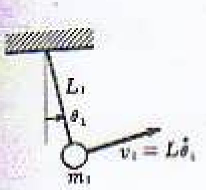
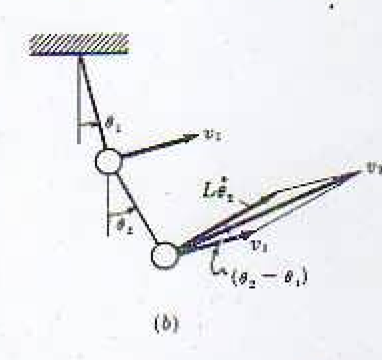


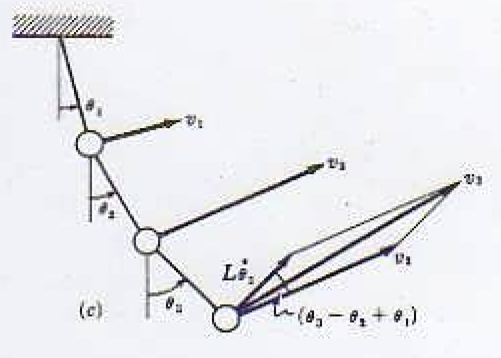
Fig. 3-8



(a)



(b)



(c)

Fig. 3-9

La energía potencial debida a la masa m_1 es $mgL(1 - \cos\theta_1)$; la energía potencial debida a la masa m_2 es $mgL[(1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2)]$ y la energía potencial debida a la masa m_3 es $mgL[(1 - \cos\theta_1) + (1 - \cos\theta_2) + (1 - \cos\theta_3)]$. Así, la energía potencial del sistema es:

$$\text{E.P.} = 3mgL(1 - \cos\theta_1) + 2mgL(1 - \cos\theta_2) + mgL(1 - \cos\theta_3)$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} + \frac{\partial(\text{E.P.})}{\partial q_i} = 0$$

Cuando $q_1 = \theta_1$ la ecuación de Lagrange nos da:

$$3L\ddot{\theta}_1 + 3g\theta_1 + 2L\ddot{\theta}_2 + L\ddot{\theta}_3 = 0$$

Análogamente, para $q_2 = \theta_2$,

$$2L\ddot{\theta}_1 + 2L\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_2 + L\ddot{\theta}_3 = 0$$

y para $q_3 = \theta_3$,

$$L\ddot{\theta}_1 + L\ddot{\theta}_2 + L\ddot{\theta}_3 + g\theta_3 = 0$$

Supongamos que los movimientos son periódicos y se componen de movimientos armónicos de diferentes frecuencias y amplitudes. Sean

$$\theta_1 = A\,\text{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \psi)$$
$$\theta_2 = B\,\text{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\,\text{sen}(\omega t + \psi)$$
$$\theta_3 = C\,\text{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{\theta}_3 = -\omega^2 C\,\text{sen}(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(3g - 3L\omega^2)A - 2L\omega^2 B - L\omega^2 C = 0$$
$$-2L\omega^2 A + (2g - 2L\omega^2)B - L\omega^2 C = 0$$
$$-L\omega^2 A - L\omega^2 B + (g - L\omega^2)C = 0$$

que nos da la ecuación de frecuencia del sistema, en forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} (3g - 3L\omega^2) & -2L\omega^2 & -L\omega^2 \\ -2L\omega^2 & (2g - 2L\omega^2) & -L\omega^2 \\ -L\omega^2 & -L\omega^2 & (g - L\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando, obtenemos:

$$L^3\omega^6 - 9gL^2\omega^4 + 18g^2L\omega^2 - 6g^3 = 0$$

de donde $\omega_1 = 0{,}65\sqrt{g/L}$, $\omega_2 = 1{,}52\sqrt{g/L}$, y $\omega_3 = 2{,}5\sqrt{g/L}$ rad/seg.

7. Una cuerda tensionada tiene tres masas iguales colocadas como se muestra en la figura 3-10. Se puede suponer que la tensión en la cuerda permanece constante para ángulos de oscilación pequeños. Si se aplica una excitación F_0 sen ωt al centro de masa del sistema, determinar el movimiento en estado estacionario.

Las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse de la ecuación de fuerzas $\Sigma F = ma$.

$$m_1\ddot{x}_1 = -(T/L)x_1 - (T/L)(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -(T/L)(x_2 - x_1) - (T/L)(x_2 - x_3) + F_0 \text{ sen } \omega t$$
$$m_3\ddot{x}_3 = -(T/L)(x_3 - x_2) - (T/L)x_3$$

Fig. 3-10

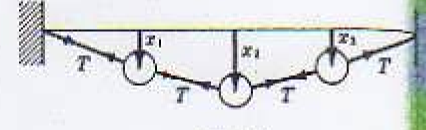


Fig. 3-11

Cambiando el orden, tenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 + (2T/L)x_1 - (T/L)x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (2T/L)x_2 - (T/L)x_3 - (T/L)x_1 = F_0 \text{ sen } \omega t$$
$$m_3\ddot{x}_3 + (2T/L)x_3 - (T/L)x_2 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } (\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C \text{ sen } (\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C \text{ sen } (\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(2T/L - \omega^2 m)A - (T/L)B = 0$$
$$-(T/L)A + (2T/L - \omega^2 m)B - (T/L)C = F_0$$
$$-(T/L)B + (2T/L - \omega^2 m)C = 0$$

Y resolviendo por la regla de Cramer hallamos:

$$A = \frac{(F_0\, T/L)(2T/L - \omega^2 m)}{(Lm/T)^3\omega^6 - 6(Lm/T)^2\omega^4 + (10Lm/T)\omega^2 - 4}$$

$$B = \frac{(F_0\, T/L)(2T/L - \omega^2 m)^2}{(Lm/T)^3\omega^6 - 6(Lm/T)^2\omega^4 + 10(Lm/T)\omega^2 - 4}$$

$$C = \frac{(F_0\, T/L)(2T/L - \omega^2 m)}{(Lm/T)^3\omega^6 - 6(Lm/T)^2\omega^4 + 10(Lm/T)\omega^2 - 4}$$

Por consiguiente el movimiento del estado estacionario de las masas está dado por:

$$x_1(t) = A \text{ sen } \omega t$$
$$x_2(t) = B \text{ sen } \omega t$$
$$x_3(t) = C \text{ sen } \omega t$$

donde los valores de los coeficientes A, B y C son los deducidos anteriormente.

8. Tres bloques de madera que tienen masa unitaria y están unidos por resortes de rigidez 1 lb/pul, como se muestra en la figura 3-12, reposan sobre una superficie sin rozamiento. Si al bloque m_3 se le da un desplazamiento inicial de 1 pulgada, determinar el movimiento resultante del sistema.



Fig. 3-12

Las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema están dadas por:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0 \qquad (1)$$
$$m_3\ddot{x}_3 + k(x_3 - x_2) = 0$$

Remplazando los valores dados, las ecuaciones (1) se reducen a:

$$\ddot{x}_1 + x_1 - x_2 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + 2x_2 - x_3 - x_1 = 0 \qquad (2)$$
$$\ddot{x}_3 + x_3 - x_2 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(1-\omega^2)A - B = 0$$
$$-A + (2-\omega^2)B - C = 0 \qquad (3)$$
$$-B + (1-\omega^2)C = 0$$

La solución de estas tres ecuaciones diferenciales se obtiene de:

$$\begin{vmatrix} (1-\omega^2) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\omega^2) & -1 \\ 0 & -1 & (1-\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos el determinante para obtener la ecuación de frecuencia del sistema:

$$(1-\omega^2)(\omega^2 - 3)\omega^2 = 0$$

de la cual $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = \sqrt{3}$ rad/seg.

Pero el movimiento general de un sistema de tres grados de libertad puede escribirse así:

$$x_1 = A_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + A_2\ \text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2) + A_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$
$$x_2 = B_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + B_2\ \text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2) + B_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$
$$x_3 = C_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + C_2\ \text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2) + C_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$

donde las amplitudes B y C pueden expresarse en función de las A, en virtud de las razones de amplitud obtenidas de las ecuaciones algebraicas.

De la primera ecuación de (3),

$$\frac{B}{A} = (1-\omega^2), \qquad \text{y} \qquad \frac{B_1}{A_1} = 1, \quad \frac{B_2}{A_2} = 0, \quad \frac{B_3}{A_3} = -2$$

donde las tres razones de amplitud se obtienen al remplazar ω_1, ω_2 y ω_3 por ω en la ecuación de amplitud. Utilizando las ecuaciones primera y tercera, de (3), obtenemos:

$$\frac{C}{A} = \frac{(1-\omega^2)}{(1-\omega^2)}, \qquad \text{y} \qquad \frac{C_1}{A_1} = 1, \quad \frac{C_2}{A_2} = \frac{0}{0}, \quad \frac{C_3}{A_3} = 1$$

Como la razón de amplitud C_2/A_2 es indeterminada, utilicemos la segunda ecuación de (3) para obtener:

$$-A_2 + (2-\omega_2^2)B_2 - C_2 = 0$$

o

$$-A_2 + B_2 - C_2 = 0$$

donde ω es remplazada por ω_2. Esto puede escribirse así:

$$-1 + (B_2/A_2) - (C_2/A_2) = 0$$

Pero como $(B_2/A_2) = 0$, entonces, $C_2/A_2 = -1$.

En función de A_1, A_2 y A_3, el movimiento general se convierte en:

$$x_1 = A_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) + A_2\ \text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2) + A_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$
$$x_2 = A_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) - 2A_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$
$$x_3 = A_1\ \text{sen}\,(\omega_1 t + \psi_1) - A_2\ \text{sen}\,(\omega_2 t + \psi_2) + A_3\ \text{sen}\,(\omega_3 t + \psi_3)$$

Las seis condiciones iniciales son $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = 0$, $\dot{x}_2(0) = 0$, $\dot{x}_3(0) = 0$; entonces

$$A_1 \operatorname{sen} \psi_1 + A_2 \operatorname{sen} \psi_2 + A_3 \operatorname{sen} \psi_3 = 0$$
$$A_1 \operatorname{sen} \psi_1 - 2A_2 \operatorname{sen} \psi_2 = 0$$
$$A_1 \operatorname{sen} \psi_1 - A_2 \operatorname{sen} \psi_2 + A_3 \operatorname{sen} \psi_3 = 1$$
$$A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2 + \sqrt{3} A_3 \cos \psi_3 = 0$$
$$A_1 \cos \psi_1 - 2\sqrt{3} A_3 \cos \psi_3 = 0$$
$$A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2 + \sqrt{3} A_3 \cos \psi_3 = 0$$

Sumando las ecuaciones (7), (8) y (9), tenemos que $3A_1 \cos \psi_1 = 0$, o sea que $\psi_1 = \pi/2$ y de (7) y (8) tenemos: $\psi_2 = \psi_3 = \pi/2$. De las ecuaciones (4), (5) y (6) obtenemos: $A_1 = 1/3$, $A_2 = -1/2$ y $A_3 = 1/6$. Por consiguiente el movimiento general es:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(t + \pi/2) + (\tfrac{1}{6}) \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{3} - (\tfrac{1}{3}) \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$
$$x_3(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(t + \pi/2) + (\tfrac{1}{6}) \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$

9. Tres masas iguales están unidas por una cuerda, la cual tiene una tensión T que puede supon[erse] constante para ángulos de oscilación pequeños. Si las masas se colocan igualmente distancia[das] como se muestra en la figura 3-13, determinar las frecuencias naturales y los modos principales [de] vibración del sistema.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (2T/L)x_1 - (T/L)x_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 + (2T/L)x_2 - (T/L)x_3 - (T/L)x_1 = 0 \quad (1)$$
$$m_3 \ddot{x}_3 + (2T/L)x_3 - (T/L)x_2 = 0$$



Fig. 3-13

Supongamos que el movimiento es periódico y está compuesto de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C \operatorname{sen}(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(2T/L - \omega^2 m)A - (T/L)B = 0$$
$$-(T/L)A + (2T/L - \omega^2 m)B - (T/L)C = 0$$
$$-(T/L)B + (2T/L - \omega^2 m)C = 0$$

y la ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B y C:

$$(Lm/T)^3\omega^6 - 6(Lm/T)^2\omega^4 + (10Lm/T)\omega^2 - 4 = 0$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos: $\omega_1 = \sqrt{0.6T/Lm}$, $\omega_2 = \sqrt{2T/Lm}$, $\omega_3 = \sqrt{3.4T/Lm}$ rad/seg.

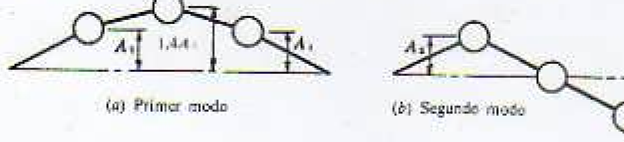
De las ecuaciones primera y tercera, de (3), tenemos:

$$B/A = B/C = 2 - (mL\omega^2)/T$$

Para el primer modo de vibración sea $\omega^2 = \omega_1^2 = 0.6T/Lm$. Entonces, $B_1/A_1 = B_1/C_1 = 1,4$ o sea $B_1 = 1,4A_1 = 1,4C_1$. Véase la figura 3-14(a).

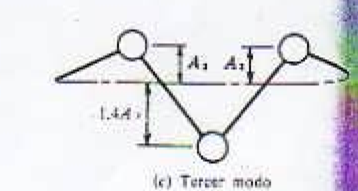
Para el segundo modo de vibración, $\omega^2 = \omega_2^2 = 2T/Lm$. Entonces, $B_2/A_2 = B_2/C_2 = 0$ y de la seg[unda] ecuación de (3), $A_2 = -C_2$. Véase la figura 3-14(b).

Para el tercer modo de vibración, sea $\omega^2 = \omega_3^2 = 3.4T/Lm$. Entonces, $B_3/A_3 = B_3/C_3 = -1,4$. Véase [la fi]gura 3-14(c).



(a) Primer modo

(b) Segundo modo



(c) Tercer modo

Fig. 3-14

10. Una masa m, colocada en el extremo de una banda de caucho de longitud L, está girando alrededor del punto O, como se muestra en la figura 3-15. Utilizar la ecuación de Lagrange para deducir las expresiones de las fuerzas generalizadas que actúan sobre m durante las oscilaciones libres.

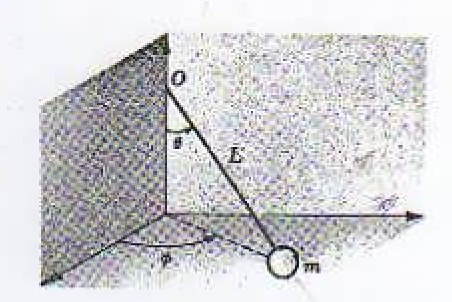


Fig. 3-15

La ecuación de Lagrange para vibraciones libres puede escribirse en la forma:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial q_i} = Q_i$$

que no incluye formalmente la energía potencial, E.P. Las fuerzas generalizadas Q_i son deducibles de un potencial.

La energía cinética de la masa está dada por:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}m(\dot{L}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + L^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

y

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{L}} = m\ddot{L}, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial L} = m(L\dot{\theta}^2 + L\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\ddot{\theta} + 2mL\dot{L}\dot{\theta}, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \theta} = mL^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \dot{\phi}} = 2mL\dot{L}\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + mL^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2mL^2\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \qquad \frac{\partial(\text{E.C.})}{\partial \phi} = 0$$

Por consiguiente las expresiones de las fuerzas generalizadas son:

$$m(\ddot{L} - L\dot{\theta}^2 - L\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) = Q_L$$
$$m(L^2\ddot{\theta} + 2L\dot{L}\dot{\theta} - L^2\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta) = Q_\theta$$
$$m(2L\dot{L}\dot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + L^2\ddot{\phi}\operatorname{sen}^2\theta + 2mL^2\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta) = Q_\phi$$

11. Una masa m está soportada por resortes de hojas que tienen un amortiguamiento estructural g y una rigidez k. Si a esta masa se le conecta un elemento de rigidez k_1, amortiguamiento de inercia G y se limita el movimiento por medio de un resorte de rigidez k_2 y un amortiguamiento viscoso c, como se muestra en la figura 3-16, determinar las ecuaciones diferenciales del sistema.

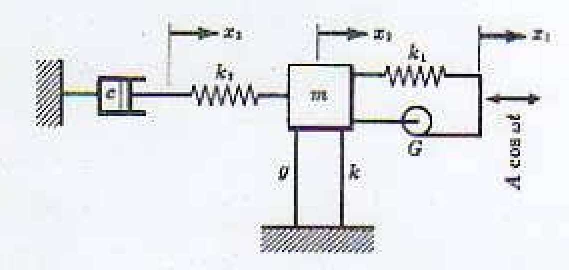


Fig. 3-16

El *amortiguamiento de inercia* puede expresarse como una fuerza de disipación de energía, cuya magnitud es proporcional a la amplitud del cambio de aceleración a través del elemento que tiene constante de proporcionalidad G, mientras que el *amortiguamiento estructural* es una fuerza de disipación de energía, cuya magnitud es proporcional a la amplitud del cambio de desplazamiento a través de los resortes de hojas que tienen constante de proporcionalidad gk.

Dibujando el diagrama vectorial de la fuerza que rota, como se indica en la figura 3-17, se observa que el amortiguamiento estructural está adelantado 90° al amortiguamiento viscoso, mientras que el amortiguamiento de inercia está retrasado con respecto al amortiguamiento viscoso, es decir, tenemos:

$c\dot{x}$	para el amortiguamiento viscoso
$igkx$	para el amortiguamiento estructural
$-iG\ddot{x}$	para el amortiguamiento de inercia.

Pero para vibraciones forzadas,

$$\dot{x} = i\omega x, \quad \text{o} \quad x = \dot{x}/i\omega, \quad \ddot{x} = i\omega\dot{x}$$

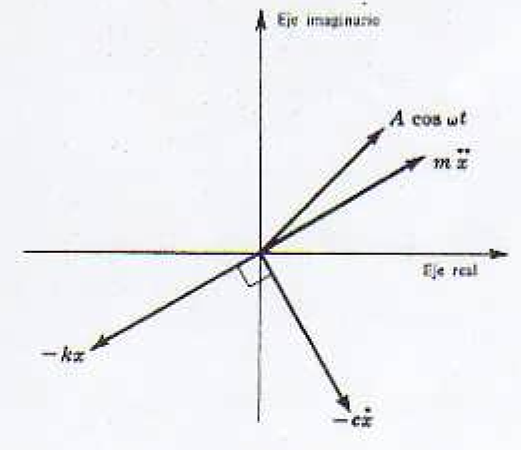


Fig. 3-17

Así, el amortiguamiento estructural se convierte en:

$$igkx = igk(\dot{x}/i\omega) = (gk/\omega)\dot{x}$$

y el amortiguamiento de inercia se convierte en:

$$-iG\ddot{x} = -iG(i\omega\dot{x}) = (G\omega)\dot{x}$$

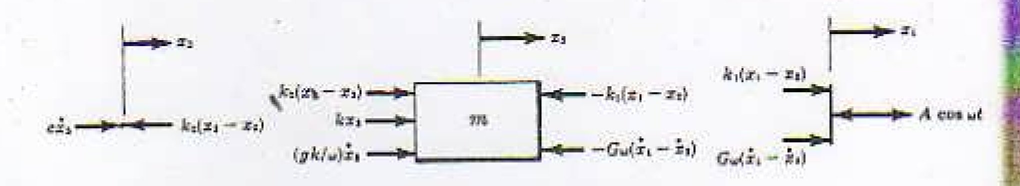


Fig. 3-18

De los diagramas de cuerpo libre (figura 3-18), las ecuaciones diferenciales de movimiento son:

$$G\omega(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) = A\cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + (gk/\omega)\dot{x}_2 + kx_2 + k_2(x_2 - x_3) + G\omega(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1(x_2 - x_1) = 0$$
$$c\dot{x}_3 + k_2(x_3 - x_2) = 0$$

Y cambiando el orden obtenemos:

$$G\omega\dot{x}_1 + k_1x_1 - G\omega\dot{x}_2 - k_1x_2 = A\cos\omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + (gk/\omega + G\omega)\dot{x}_2 + (k + k_1 + k_2)x_2 - k_2x_3 - G\omega\dot{x}_1 - k_1x_1 = 0$$
$$c\dot{x}_3 + k_2x_3 - k_2x_2 = 0$$

SISTEMAS DE CUATRO GRADOS DE LIBERTAD

12. Suponiendo que todas las superficies en contacto son lisas, escriba las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema que se muestra en la figura 3-19.

NO

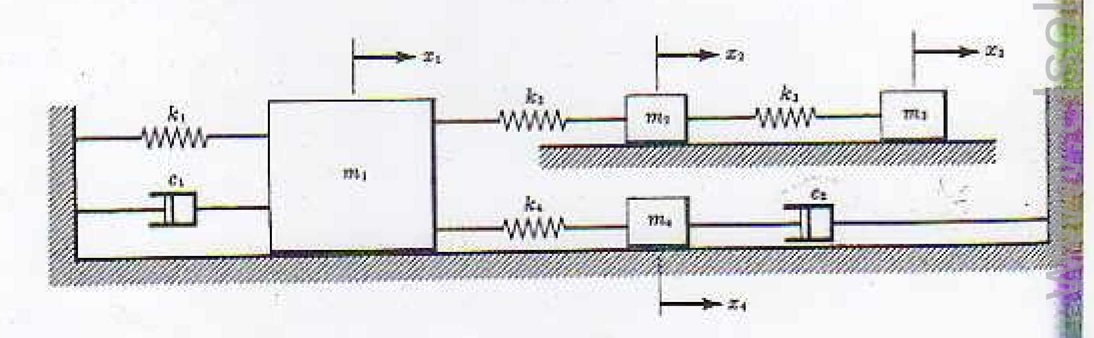


Fig. 3-19

Como hay cuatro masas unidas por medio de resortes y de amortiguadores, se necesitan cuatro coordenadas independientes para especificar la configuración del sistema en un instante cualquiera. Con x_1, x_2, x_3 y x_4 se pueden determinar las posiciones de todas las masas en un instante cualquiera, diferente de cero. Por esta razón, este es un sistema de cuatro grados de libertad. Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden obtenerse fácilmente dibujando el diagrama de cuerpo libre de cada masa separadamente y aplicando la segunda ley de Newton a cada masa, con el fin de obtener tantas ecuaciones de movimiento como grados de libertad tiene el sistema. Este procedimiento se puede aplicar a sistemas masa-resorte de muchos grados de libertad.

En la figura 3-20 supongamos que x_1 es mayor que x_2; la ecuación diferencial de movimiento está dada por $\Sigma F = ma$:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - k_4(x_1 - x_4) - c_1\dot{x}_1$$



Fig. 3-20

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Para la masa m_2 la ecuación de movimiento es:

$$m_2\ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) - k_3(x_2 - x_3)$$

Para la masa m_3 la ecuación de movimiento está dada por:

$$m_3\ddot{x}_3 = k_3(x_2 - x_3)$$

y para la masa m_4,

$$m_4\ddot{x}_4 = k_4(x_1 - x_4) - c_2\dot{x}_4$$

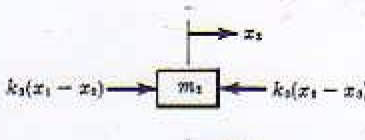


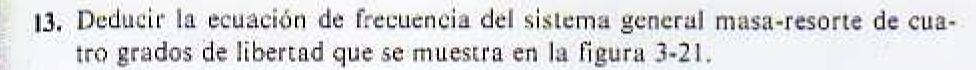




Fig. 3-20

Por consiguiente, las cuatro ecuaciones diferenciales de movimiento que representan el sistema dado, pueden expresarse como:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2 + k_4)x_1 - k_2x_2 - k_4x_4 + c_1\dot{x}_1 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - k_2x_1 = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 - k_3x_2 = 0$$
$$m_4\ddot{x}_4 + c_2\dot{x}_4 + k_4x_4 - k_4x_1 = 0$$



13. Deducir la ecuación de frecuencia del sistema general masa-resorte de cuatro grados de libertad que se muestra en la figura 3-21.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por $\Sigma F = ma$:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 - k_2x_1 = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 + (k_3 + k_4)x_3 - k_4x_4 - k_3x_2 = 0$$
$$m_4\ddot{x}_4 + (k_4 + k_5)x_4 - k_4x_3 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$
$$x_4 = D\ \text{sen}\,(\omega t + \psi), \qquad \ddot{x}_4 = -\omega^2 D\ \text{sen}\,(\omega t + \psi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y simplificando, tenemos:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = 0$$
$$-k_2A + (k_2 + k_3 - m_2\omega^2)B - k_3C = 0$$
$$-k_3B + (k_3 + k_4 - m_3\omega^2)C - k_4D = 0$$
$$-k_4C + (k_4 + k_5 - m_4\omega^2)D = 0$$

Fig. 3-21

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B, C y D:

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2\omega^2) & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4 - m_3\omega^2) & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & (k_4 + k_5 - m_4\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Escribiendo el determinante en otra forma, tenemos:

$$\begin{vmatrix} a & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & b & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & c & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & d \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}\begin{vmatrix} ab - k_2^2 & -ak_3 & 0 \\ -ak_3 & ac & -ak_4 \\ 0 & -ak_4 & ad \end{vmatrix}$$
$$= abcd - (k_2^2cd + k_3^2da + k_4^2ab) + k_2^2k_4^2 = 0$$

o

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)(k_3 + k_4 - m_3\omega^2)(k_4 + k_5 - m_4\omega^2)$$
$$- \{[k_2^2(k_3 + k_4 - m_3\omega^2)(k_4 + k_5 - m_4\omega^2)] + [k_3^2(k_4 + k_5 - m_4\omega^2)(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)]$$
$$+ [k_4^2(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 + k_3 - m_2\omega^2)]\} + k_2^2k_4^2 = 0$$

Desarrollando esta expresión obtenemos:

$$\omega^8 - \left[\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} + \frac{k_3+k_4}{m_3} + \frac{k_4+k_5}{m_4}\right]\omega^6$$

$$+ \left[\frac{k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1}{m_1m_2} + \frac{k_2k_3+k_3k_4+k_4k_2}{m_2m_3} + \frac{k_3k_4+k_4k_5+k_5k_3}{m_3m_4} + \frac{(k_1+k_2)(k_3+k_4)}{m_1m_3} + \frac{(k_2+k_3)(k_4+k_5)}{m_2m_4} + \frac{(k_4+k_5)(k_1+k_2)}{m_4m_1}\right]\omega^4$$

$$- \left[\frac{k_1k_2k_3+k_2k_3k_4+k_3k_4k_1+k_4k_1k_2}{m_1m_2m_3} + \frac{k_2k_3k_4+k_3k_4k_5+k_4k_5k_2+k_5k_2k_3}{m_2m_3m_4} + \frac{(k_1+k_2)(k_3k_4+k_4k_5+k_5k_3)}{m_3m_4m_1} + \frac{(k_4+k_5)(k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1)}{m_4m_1m_2}\right]\omega^2$$

$$+ \frac{k_1k_2k_3k_4+k_2k_3k_4k_5+k_3k_4k_5k_1+k_4k_5k_1k_2+k_5k_1k_2k_3}{m_1m_2m_3m_4} = 0$$

MATRICES

14. El movimiento de las dos masas que se muestran en la figura 3-22 está restringido al plano del papel. Los movimientos en las direcciones perpendiculares se pueden tomar independientes, uno del otro, para ángulos de oscilación pequeños. Calcular las frecuencias naturales, la matriz inercia, la matriz rigidez y la matriz dinámica.

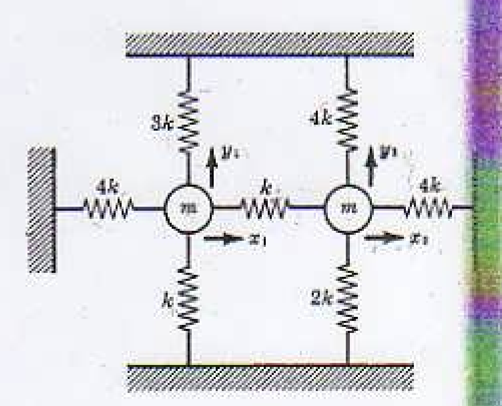


Fig. 3-22

Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 + 5kx_2 - kx_1 = 0$$
$$m\ddot{y}_1 + 4ky_1 = 0$$
$$m\ddot{y}_2 + 6ky_2 = 0$$

Haciendo $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $y_1 = q_3$ y $y_2 = q_4$, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0$$

y así, la matriz inercia es $[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ y la matriz rigidez es $[K] = \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix}$

La matriz dinámica es $[C] = [M]^{-1}[K]$, donde $[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix}$, y por tanto,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5k/m & -k/m & 0 & 0 \\ -k/m & 5k/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k/m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k/m \end{bmatrix}$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Utilice la teoría de la matriz λ para obtener:

$$f(\lambda) = [\lambda I - C] = \begin{bmatrix} (\lambda - 5k/m) & (k/m) & 0 & 0 \\ (k/m) & (\lambda - 5k/m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 4k/m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 6k/m) \end{bmatrix}$$

y la ecuación característica es $\Delta(f) = |\lambda I - C| = 0$, es decir,

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 5k/m) & (k/m) & 0 & 0 \\ (k/m) & (\lambda - 5k/m) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 4k/m) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - 6k/m) \end{vmatrix} = 0$$

y por tanto, $\omega_1 = \sqrt{4k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{6k/m}$, $\omega_3 = \sqrt{4k/m}$, $\omega_4 = \sqrt{6k/m}$ rad/seg.

15. Determinar las coordenadas principales del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-22, por el método matricial.

Las coordenadas principales están dadas por:

$$\{p\} = [\alpha]^{-1}\{q\}$$

donde $[\alpha]^{-1}$ es la inversa de la matriz de trasformación $[\alpha]$, la cual está formada por todos los modos principales de vibración del sistema.

Se ha encontrado que las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = \sqrt{4k/m}, \quad \omega_2 = \sqrt{6k/m}, \quad \omega_3 = \sqrt{4k/m}, \quad \omega_4 = \sqrt{6k/m}$$

y de la teoría de la matriz λ, se puede demostrar que la matriz de trasformación está dada por:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, $[\alpha]^{-1} = \dfrac{\{\text{adjunta } [\alpha]\}^T}{|\alpha|}$, donde $\{\text{adjunta } [\alpha]\}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $|\alpha| = 2$. Por consiguiente,

$$[\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \{p\} = [\alpha]^{-1}\{q\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

donde q_1, q_2, q_3 y q_4 son las coordenadas generalizadas que representan a x_1, x_2, y_1 y y_2, respectivamente. Por tanto,

$$p_1 = q_1/2 - q_2/2 = x_1/2 - x_2/2 \qquad p_3 = q_3/2 = y_1/2$$
$$p_2 = q_1/2 + q_2/2 = x_1/2 + x_2/2 \qquad p_4 = q_4/2 = y_2/2$$

COEFICIENTES DE INFLUENCIA

16. Determinar los coeficientes de influencia del sistema masa-resorte de tres grados de libertad que se muestra en la figura 3-23.

Por definición, el coeficiente de influencia α_{ij} es la deflexión en la coordenada i debida a una fuerza unitaria aplicada en la coordenada j. Para un sistema de tres grados de libertad habrá nueve coeficientes de influencia, que son $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$ y α_{33}.

Cuando se aplica una fuerza unitaria a la masa $4m$, como se indica en la figura 3-23(a), el resorte de rigidez $3k$ se estirará $1/3k$, lo cual es igual a α_{11}. Por consiguiente, $\alpha_{11} = 1/3k$.

Cuando la masa $4m$ se deflecta una longitud $\alpha_{11} = 1/3k$ bajo la acción de una fuerza unitaria, las masas $2m$ y m simplemente se moverán hacia abajo una distancia igual, es decir,

$$\alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{11} = 1/3k$$

Por el teorema recíproco de Maxwell tenemos: $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. En consecuencia, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$, y $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, y por consiguiente:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = 1/3k$$

Para hallar α_{22}, aplique una fuerza unitaria a la masa $2m$, como se muestra en la figura 3-23(b). Los resortes $3k$ y k están en serie y su constante elástica equivalente está dada por:

$$1/k_{eq} = 1/3k + 1/k \quad \text{o sea que,} \quad k_{eq} = 3k/4$$

La deflexión es F/k_{eq}, o sea, $1/(3k/4) = 4/3k = \alpha_{22}$; como la masa m cuelga de la masa $2m$, tenemos que $\alpha_{32} = \alpha_{22}$. Ahora, $\alpha_{32} = \alpha_{23}$; por consiguiente,

$$\alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{32}$$

Fig. 3-23

Para encontrar α_{33} aplique una fuerza unitaria a la masa m. Los tres resortes están en serie y su rigidez equivalente está dada por:

$$1/k_{eq} = 1/3k + 1/k + 1/k = 7/3k \qquad \text{o} \qquad k_{eq} = 3k/7$$

y

$$\alpha_{33} = F/k_{eq} = 1/(3k/7) = 7/3k$$

Los coeficientes de influencia del sistema son:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 1/3k, & \alpha_{12} &= 1/3k, & \alpha_{13} &= 1/3k \\ \alpha_{21} &= 1/3k, & \alpha_{22} &= 4/3k, & \alpha_{23} &= 4/3k \\ \alpha_{31} &= 1/3k, & \alpha_{32} &= 4/3k, & \alpha_{33} &= 7/3k \end{aligned}$$

17. Determinar los coeficientes de influencia del péndulo triple de longitudes L_1, L_2 y L_3 y masas m_1, m_2 y m_3, que se muestra en la figura 3-24.

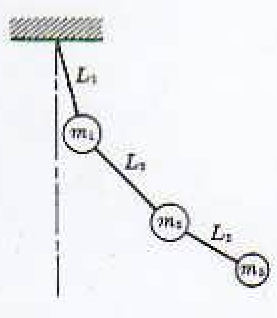


Fig. 3-24

Apliquemos una fuerza unitaria horizontal a la masa m_1 del péndulo, como se muestra en la figura 3-25 y exprese las ecuaciones de fuerzas alrededor de la masa m_1. Puesto que m_1 está en equilibrio:

$$T \operatorname{sen} \theta = 1 \qquad (1)$$

$$T \cos \theta = g(m_1 + m_2 + m_3) \qquad (2)$$

Dividamos la ecuación (1) por la (2) para obtener:

$$\tan \theta = 1/g(m_1 + m_2 + m_3)$$

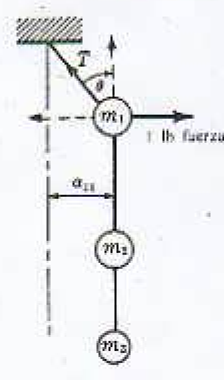


Fig. 3-25

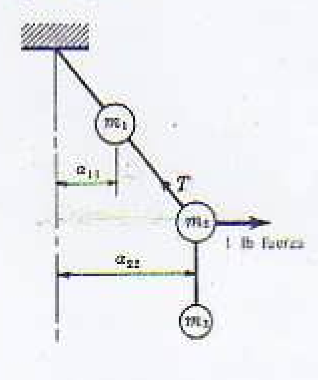


Fig. 3-26

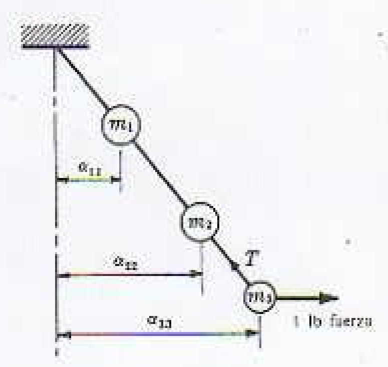


Fig. 3-27

Para ángulos de oscilación pequeños, $\tan\theta \doteq \operatorname{sen}\theta$ y de la configuración del sistema tenemos que $\operatorname{sen}\theta = \alpha_{11}/L_1$. En consecuencia:

$$\alpha_{11} = L_1/g(m_3 + m_2 + m_1)$$

y por la geometría del sistema tenemos que $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31}$.

Cuando se aplica una fuerza horizontal unitaria a la masa m_2, como se muestra en la figura 3-26, la masa m_1 se desplazará una distancia α_{11}, mientras que m_2 y m_3 se desplazarán una distancia adicional igual a $L_2/g(m_2 + m_3)$ cada una. Por consiguiente,

$$\alpha_{12} = \alpha_{11} \qquad \text{y} \qquad \alpha_{22} = \alpha_{32} = \alpha_{11} + L_2/g(m_2 + m_3)$$

Similarmente, cuando la única fuerza que actúa sobre la masa m_3 es una fuerza horizontal unitaria, como se muestra en la figura 3-27, la masa m_1 se desplazará una distancia α_{11} y m_2 una distancia $[\alpha_{11} + L_2/g(m_2 + m_3)]$, mientras que m_3 se desplazará una distancia adicional igual a L_3/gm_3; entonces,

$$\alpha_{13} = \alpha_{11}, \qquad \alpha_{23} = \alpha_{22}, \qquad \alpha_{33} = \alpha_{22} + L_3/gm_3$$

Por tanto, los coeficientes de influencia están dados por:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$\alpha_{21} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)}, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{23} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{L_2}{g(m_2 + m_3)}$$

$$\alpha_{31} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)}, \qquad \alpha_{32} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{L_2}{g(m_2 + m_3)},$$

$$\alpha_{33} = \frac{L_1}{g(m_1 + m_2 + m_3)} + \frac{L_2}{g(m_2 + m_3)} + \frac{L_3}{gm_3}$$

18. Calcular los coeficientes de influencia del sistema masa-resorte de tres grados de libertad que se muestra en la figura 3-28, cuando todas las masas son iguales a m y todos los resortes son iguales a k.

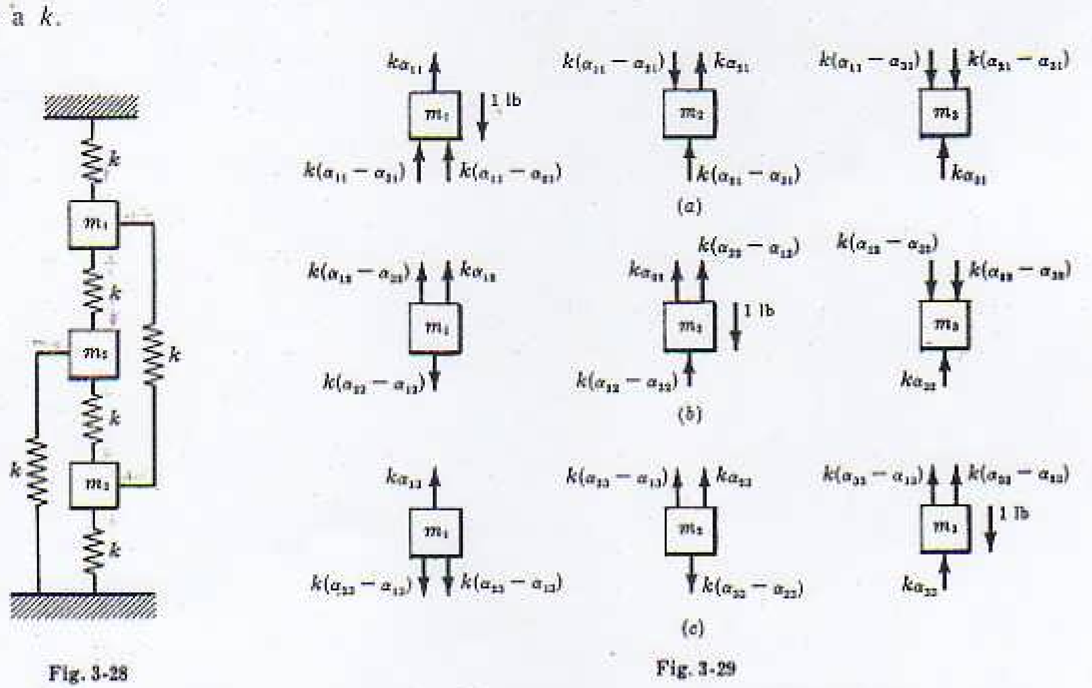


Fig. 3-28

Fig. 3-29

Designe las masas: m_1, m_2 y m_3. Aplique una fuerza unitaria de una libra a la masa m_1. De los diagramas de cuerpo libre, en la figura 3-29(a), obtenemos:

$$\begin{aligned} k\alpha_{11} + k(\alpha_{11} - \alpha_{31}) + k(\alpha_{11} - \alpha_{21}) &= 1 \\ k(\alpha_{11} - \alpha_{21}) &= k(\alpha_{21} - \alpha_{31}) + k\alpha_{21} \\ k(\alpha_{21} - \alpha_{31}) + k(\alpha_{11} - \alpha_{31}) &= k\alpha_{31} \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 3k\alpha_{11} - k\alpha_{21} - k\alpha_{31} &= 1 \\ 3\alpha_{21} - \alpha_{31} - \alpha_{11} &= 0 \\ 3\alpha_{31} - \alpha_{11} - \alpha_{21} &= 0 \end{aligned}$$

que nos da

$$\alpha_{11} = 1/2k, \qquad \alpha_{21} = 1/4k, \qquad \alpha_{31} = 1/4k$$

Análogamente se obtendrán las siguientes ecuaciones de fuerzas al aplicar una fuerza unitaria a la masa m_2, como se muestra en la figura 3-29(b):

$$k(\alpha_{12}-\alpha_{32})+k\alpha_{12} = k(\alpha_{22}-\alpha_{12}) \qquad 3\alpha_{12}-\alpha_{22}-\alpha_{32} = 0$$
$$k(\alpha_{22}-\alpha_{12})+k\alpha_{22}+k(\alpha_{22}-\alpha_{32}) = 1 \quad \text{o} \quad 3k\alpha_{22}-k\alpha_{32}-k\alpha_{12} = 1$$
$$k(\alpha_{22}-\alpha_{32})+k(\alpha_{12}-\alpha_{32}) = k\alpha_{32} \qquad 3\alpha_{32}-\alpha_{12}-\alpha_{22} = 0$$

de donde

$$\alpha_{12} = 1/4k, \qquad \alpha_{22} = 1/2k, \qquad \alpha_{32} = 1/4k$$

Y finalmente, cuando se aplica una fuerza unitaria a la masa m_3, como se muestra en la figura 3-29(c), obtenemos:

$$k(\alpha_{33}-\alpha_{13})+k(\alpha_{23}-\alpha_{13}) = k\alpha_{13} \qquad 3\alpha_{13}-\alpha_{23}-\alpha_{33} = 0$$
$$k(\alpha_{23}-\alpha_{13})+k\alpha_{23} = k(\alpha_{33}-\alpha_{23}) \quad \text{o} \quad 3\alpha_{23}-\alpha_{33}-\alpha_{13} = 0$$
$$k(\alpha_{33}-\alpha_{13})+k(\alpha_{33}-\alpha_{23})+k\alpha_{33} = 1 \qquad 3k\alpha_{33}-k\alpha_{13}-k\alpha_{23} = 1$$

de donde

$$\alpha_{13} = 1/4k, \qquad \alpha_{23} = 1/4k, \qquad \alpha_{33} = 1/2k$$

Los coeficientes de influencia del sistema son, entonces,

$$\alpha_{11} = 1/2k \qquad \alpha_{12} = 1/4k \qquad \alpha_{13} = 1/4k$$
$$\alpha_{21} = 1/4k \qquad \alpha_{22} = 1/2k \qquad \alpha_{23} = 1/4k$$
$$\alpha_{31} = 1/4k \qquad \alpha_{32} = 1/4k \qquad \alpha_{33} = 1/2k$$

19. Calcular los coeficientes de influencia de un sistema dinámico que consta de tres masas iguales fijadas a una cuerda tensionada, como se muestra en la figura 3-30.

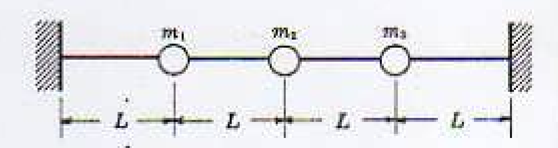


Fig. 3-30

Se puede suponer que la tensión en la cuerda, T, permanece constante para ángulos de oscilación pequeños. α_{11} es la deflexión en la posición 1 debida a una fuerza unitaria aplicada en esta posición.

En la posición indicada en la figura 3-31, la fuerza unitaria es balanceada por las fuerzas de tensión ejercidas por la cuerda. Para ángulos de oscilación pequeños esto puede expresarse como:

$$(\alpha_{11}/L)T + (\alpha_{11}/3L)T = 1$$

que nos da $\alpha_{11} = 3L/4T$.

α_{21} y α_{31} son las deflexiones de las masas m_2 y m_3 debidas a la fuerza unitaria aplicada a m_1. Estas deflexiones están dadas por:

$$\alpha_{21} = \tfrac{2}{3}(\alpha_{11}) = L/2T, \qquad \alpha_{31} = \tfrac{1}{3}(\alpha_{11}) = L/4T$$

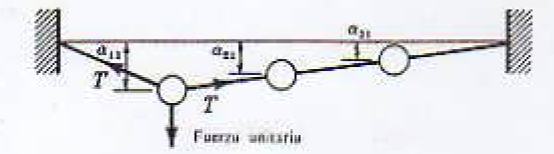


Fig. 3-31

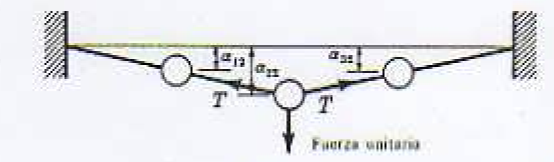


Fig. 3-32

Para determinar α_{22} aplique una fuerza unitaria a la masa m_2, como se muestra en la figura 3-32. Las fuerzas que actúan en la masa m_2 son: la fuerza unitaria aplicada y las fuerzas de tensión; entonces,

$$(\alpha_{22}/2L)T + (\alpha_{22}/2L)T = 1$$

que nos da $\alpha_{22} = L/T$ y $\alpha_{12} = \alpha_{32} = L/2T$.

Por simetría, $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 3L/4T$ y por el teorema recíproco de Maxwell, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{13} = \alpha_{31}$ y $\alpha_{23} = \alpha_{32}$. Por consiguiente, los coeficientes de influencia del sistema son:

$$\alpha_{11} = 3L/4T, \qquad \alpha_{12} = L/2T, \qquad \alpha_{13} = L/4T$$
$$\alpha_{21} = L/2T, \qquad \alpha_{22} = L/T, \qquad \alpha_{23} = L/2T$$
$$\alpha_{31} = L/4T, \qquad \alpha_{32} = L/2T, \qquad \alpha_{33} = 3L/4T$$

20. Probar el teorema recíproco de Maxwell, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, para una viga simplemente apoyada que tiene dos cargas concentradas actuando como se indica en la figura 3-33.



Fig. 3-33

Los cuatro coeficientes de influencia del sistema son: $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ y α_{22}. Para probar el teorema recíproco de Maxwell basta demostrar que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$. Esto puede hacerse aplicando las cargas en dos ciclos.

En el primer ciclo aplique primero W_1 y luego W_2. Cuando se aplica W_1 en la posición 1, únicamente, los coeficientes de influencia son α_{11} y α_{21} y

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2} W_1^2 \alpha_{11}$$

Cuando se aplica W_2 (después de estar aplicada W_1) la energía adicional del sistema es $\tfrac{1}{2}W_2^2\alpha_{22} + W_1(W_2\alpha_{12})$ y por tanto la energía total es $\tfrac{1}{2}W_1^2\alpha_{11} + \tfrac{1}{2}W_2^2\alpha_{22} + W_1(W_2\alpha_{12})$.

En el segundo ciclo, aplique primero W_2 y luego W_1. De forma similar, la energía total del sistema está dada por:

$$\tfrac{1}{2}W_2^2\alpha_{22} + \tfrac{1}{2}W_1^2\alpha_{11} + W_2(W_1\alpha_{21}).$$

Puesto que al final de ambos ciclos de aplicación de cargas se tiene el mismo estado, las dos expresiones de energía deben ser iguales. Igualando las dos expresiones de energía obtenemos: $\alpha_{12} = \alpha_{21}$.

Se puede demostrar que el teorema recíproco de Maxwell puede extenderse a sistemas en que actúen varias cargas.

21. En la figura 3-34 supongamos que la viga tiene una constante de rigidez EI y no tiene peso. Utilizar los coeficientes de influencia para determinar las ecuaciones diferenciales de movimiento.

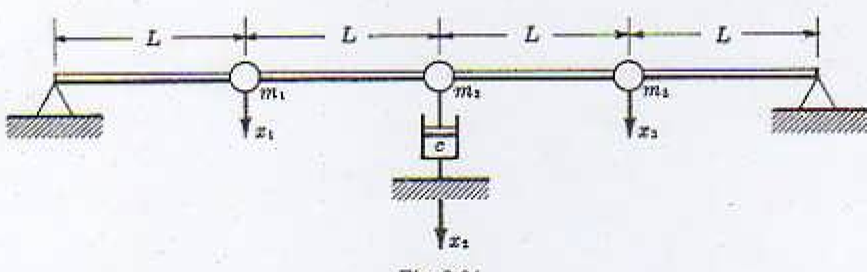


Fig. 3-34

De la teoría de los coeficientes de influencia, las deflexiones totales en las posiciones 1, 2 y 3 están dadas por:

$$x_1 = -m_1\ddot{x}_1\alpha_{11} - m_2\ddot{x}_2\alpha_{12} - m_3\ddot{x}_3\alpha_{13} - c\dot{x}_2\alpha_{12}$$
$$x_2 = -m_1\ddot{x}_1\alpha_{21} - m_2\ddot{x}_2\alpha_{22} - m_3\ddot{x}_3\alpha_{23} - c\dot{x}_2\alpha_{22}$$
$$x_3 = -m_1\ddot{x}_1\alpha_{31} - m_2\ddot{x}_2\alpha_{32} - m_3\ddot{x}_3\alpha_{33} - c\dot{x}_2\alpha_{32}$$

De la resistencia de materiales tenemos:

$$\alpha_{11} = \frac{9L^3}{12EI}, \qquad \alpha_{21} = \frac{11L^3}{12EI}, \qquad \alpha_{22} = \frac{16L^3}{12EI}$$

y por la simetría del sistema,

$$\alpha_{33} = \alpha_{11} = \frac{9L^3}{12EI}, \qquad \alpha_{32} = \alpha_{12} = \frac{11L^3}{12EI}, \qquad \alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{7L^3}{12EI}$$

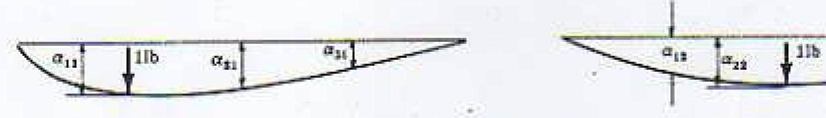


Fig. 3-35

Finalmente, por el teorema recíproco de Maxwell, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ y $\alpha_{23} = \alpha_{32}$. Por consiguiente, las ecuaciones de movimiento toman la siguiente forma:

$$(9m_1\ddot{x}_1 + 11m_2\ddot{x}_2 + 11c\dot{x}_2 + 7m_3\ddot{x}_3)(L^3/12EI) + x_1 = 0$$
$$(16m_2\ddot{x}_2 + 16c\dot{x}_2 + 11m_3\ddot{x}_3 + 11m_1\ddot{x}_1)(L^3/12EI) + x_2 = 0$$
$$(9m_3\ddot{x}_3 + 7m_1\ddot{x}_1 + 11m_2\ddot{x}_2 + 11c\dot{x}_2)(L^3/12EI) + x_3 = 0$$

www.elsolucionario.net

ITERACION MATRICIAL

22. Utilizar la iteración matricial para determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-36.

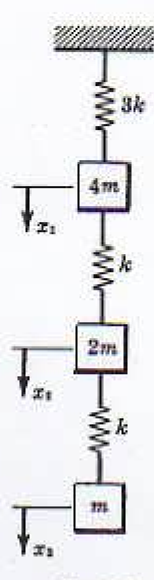


Fig. 3-36

De la teoría de los coeficientes de influencia encontramos que las ecuaciones de movimiento pueden expresarse como:

$$-x_1 = \alpha_{11}4m\ddot{x}_1 + \alpha_{12}2m\ddot{x}_2 + \alpha_{13}m\ddot{x}_3$$
$$-x_2 = \alpha_{21}4m\ddot{x}_1 + \alpha_{22}2m\ddot{x}_2 + \alpha_{23}m\ddot{x}_3$$
$$-x_3 = \alpha_{31}4m\ddot{x}_1 + \alpha_{32}2m\ddot{x}_2 + \alpha_{33}m\ddot{x}_3$$

Remplazando $\ddot{x}_i$ por $-\omega^2 x_i$, las ecuaciones toman la forma:

$$x_1 = 4\alpha_{11}mx_1\omega^2 + 2\alpha_{12}mx_2\omega^2 + \alpha_{13}mx_3\omega^2$$
$$x_2 = 4\alpha_{21}mx_1\omega^2 + 2\alpha_{22}mx_2\omega^2 + \alpha_{23}mx_3\omega^2$$
$$x_3 = 4\alpha_{31}mx_1\omega^2 + 2\alpha_{32}mx_2\omega^2 + \alpha_{33}mx_3\omega^2$$

En notación matricial estas ecuaciones se convierten en:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \omega^2 m \begin{bmatrix} 4\alpha_{11} & 2\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 4\alpha_{21} & 2\alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 4\alpha_{31} & 2\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Los valores de los coeficientes de influencia, hallados en el problema 16, son:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = 1/3k, \qquad \alpha_{22} = \alpha_{32} = \alpha_{23} = 4/3k, \qquad \alpha_{33} = 7/3k$$

Remplazando estos valores en la ecuación matricial, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Para comenzar el proceso iterativo calcule la configuración del primer modo. Sean $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$.

Primera iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 12 \\ 36 \\ 48 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}(12) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 14,0 \\ 44,0 \\ 56,0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}(14) \begin{bmatrix} 1,0 \\ 3,2 \\ 4,0 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3.2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3.2 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 14.4 \\ 45.6 \\ 57.6 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}(14,4) \begin{bmatrix} 1,00 \\ 3,18 \\ 4,00 \end{bmatrix}$$

Como la razón obtenida aquí está muy próxima al valor inicial, entonces,

$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 3.2 \\ 4.0 \end{bmatrix} = \frac{14.4m\omega^2}{3k} \begin{bmatrix} 1,00 \\ 3,18 \\ 4.00 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad 1 = (14,4m\omega^2)/3k \quad \text{y} \quad \omega_1 = 0,46\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

Para obtener el segundo modo principal se utiliza el principio de la ortogonalidad:

$$m_1A_1A_2 + m_2B_1B_2 + m_3C_1C_2 = 0$$

Para el primero y segundo modos, éste se convierte en:

$$4m(1)A_2 + 2m(3,2)B_2 + m(4)C_2 = 0$$

o $$A_2 = -1,6B_2 - C_2, \qquad B_2 = B_2, \qquad C_2 = C_2$$

y en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1{,}6 & -1{,}0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Cuando esto se combina con la ecuación matricial del primer modo, convergerá al segundo modo.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1{,}6 & -1{,}0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 0 & -4{,}4 & -3 \\ 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1{,}6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Debido a la simetría del problema, el segundo modo es $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Utilizando esta matriz para comenzar el proceso iterativo, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 0 & -4{,}4 & -3 \\ 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1{,}6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

que se repite. En consecuencia:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3m\omega^2}{3k} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad 1 = (\omega^2 m)/k \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

Para obtener el tercer modo escriba el principio de la ortogonalidad como:

$$m_1 A_2 A_3 + m_2 B_2 B_3 + m_3 C_2 C_3 = 0$$
$$m_1 A_1 A_3 + m_2 B_1 B_3 + m_3 C_1 C_3 = 0$$

Haciendo $A_1 = 1{,}0$, $B_1 = 3{,}2$, $C_1 = 4{,}0$, $A_2 = 1$, $B_2 = 0$ y $C_2 = -1$ en las ecuaciones de ortogonalidad, obtenemos:

$$4m(1)A_3 + 2m(0)B_3 + m(-1)C_3 = 0$$
$$4m(1)A_3 + 2m(3{,}20)B_3 + m(4)C_3 = 0$$

de donde $A_3 = 0{,}25C_3$ y $B_3 = -0{,}78C_3$. Entonces,

$$\begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.78 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

y cuando esto se combina con la ecuación matricial del segundo modo, producirá el tercer modo.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 0 & -4{,}4 & -3 \\ 0 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1{,}6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & -{,}78 \\ 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}43 \\ 0 & 0 & -1{,}25 \\ 0 & 0 & 1{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{3k}(1{,}75) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}25 \\ 0 & 0 & -{,}72 \\ 0 & 0 & 1{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Asumiendo valores arbitrarios para el tercer modo, se puede demostrar que se volverá a encontrar el mismo tercer modo $\begin{bmatrix} 0{,}25 \\ -{,}72 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$. Por consiguiente no se necesita una nueva iteración. Así,

$$1 = (\omega^2 m/3k)(1{,}75) \qquad \text{o} \qquad \omega_3 = 1{,}32\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

23. Utilizar la iteración matricial para determinar las frecuencias naturales del péndulo triple que se muestra en la figura 3-37.

De la teoría de los coeficientes de influencia, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$-x_1 = \alpha_{11}m_1\ddot{x}_1 + \alpha_{12}m_2\ddot{x}_2 + \alpha_{13}m_3\ddot{x}_3$$
$$-x_2 = \alpha_{21}m_1\ddot{x}_1 + \alpha_{22}m_2\ddot{x}_2 + \alpha_{23}m_3\ddot{x}_3$$
$$-x_3 = \alpha_{31}m_1\ddot{x}_1 + \alpha_{32}m_2\ddot{x}_2 + \alpha_{33}m_3\ddot{x}_3$$

Remplazando $\ddot{x}_i$ por $-\omega^2 x_i$, las ecuaciones toman la forma

$$x_1 = \alpha_{11}m_1x_1\omega^2 + \alpha_{12}m_2x_2\omega^2 + \alpha_{13}m_3x_3\omega^2$$
$$x_2 = \alpha_{21}m_1x_1\omega^2 + \alpha_{22}m_2x_2\omega^2 + \alpha_{23}m_3x_3\omega^2$$
$$x_3 = \alpha_{31}m_1x_1\omega^2 + \alpha_{32}m_2x_2\omega^2 + \alpha_{33}m_3x_3\omega^2$$

Para obtener los valores numéricos de los coeficientes de influencia, haga $L_1 = L_2 = L_3 = L$ y $m_1 = m_2 = m_3 = m$ en el problema 17:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = L/3mg$$
$$\alpha_{21} = L/3mg, \quad \alpha_{22} = \alpha_{23} = 5L/6mg$$
$$\alpha_{31} = L/3mg, \quad \alpha_{32} = 5L/6mg, \quad \alpha_{33} = 11L/6mg$$

Fig. 3-37

En notación matricial las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Comience el proceso iterativo haciendo una suposición arbitraria del primer modo del sistema.

Primera iteración:

$$\begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 3,6 \\ 8,4 \\ 14,4 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}(14,4)\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,58 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,58 \\ 1,00 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,58 \\ 1,00 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 3,66 \\ 8.42 \\ 14,4 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}(14,4)\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,58 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

Como la columna se repite, se suspende el proceso iterativo. Entonces:

$$1 = \frac{L\omega^2}{6g}(14,4) \qquad \text{o} \qquad \omega_1 = 0,65\sqrt{g/L} \text{ rad/seg}$$

Para obtener el segundo modo debe suprimirse el primer modo durante el proceso de iteración. Esto se hace utilizando el principio de la ortogonalidad:

$$m_1A_1A_2 + m_2B_1B_2 + m_3C_1C_2 = 0$$

Remplazando el primer modo en la ecuación anterior, obtenemos:

$$m(0,25)x_1 + m(0,58)x_2 + m(1,0)x_3 = 0 \quad \text{o} \quad x_1 = -2,32x_2 - 4x_3, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = x_3$$

y en forma matricial esto se convierte en

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2,32 & -4,0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Cuando esto se combina con la ecuación matricial fundamental, producirá una ecuación matricial en la cual no está presente el primer modo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2.3 & -4 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & -2.6 & -6 \\ 0 & 0.4 & -3 \\ 0 & 0.4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Con base en esta ecuación matricial, emplee la iteración matricial para determinar el segundo modo.

Primera iteración:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & -2,6 & -6 \\ 0 & 0,4 & -3 \\ 0 & 0,4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} -3,4 \\ -3,4 \\ 2,6 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}(2,6)\begin{bmatrix} -1,3 \\ -1,3 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} -1,3 \\ -1,3 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & -2,6 & -6 \\ 0 & 0,4 & -3 \\ 0 & 0,4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,3 \\ -1,3 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} -2,6 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}(2,5)\begin{bmatrix} -1,05 \\ -1,40 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} -1,0 \\ -1,4 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & -2,6 & -6 \\ 0 & 0,4 & -3 \\ 0 & 0,4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1,0 \\ -1,4 \\ 1,0 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} -2,4 \\ -3,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}(2,5)\begin{bmatrix} -1,0 \\ -1,4 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Como el modo supuesto se repite en la última iteración, se suspende el proceso iterativo. Por consiguiente, el modo de vibración y la frecuencia natural están dados por:

$$\begin{bmatrix} -1,0 \\ -1,4 \\ 1,0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad 1 = \frac{L\omega^2}{6g}(2,5) \quad \text{o} \quad \omega_2 = 1,52\sqrt{g/L} \text{ rad/seg}$$

Para obtener el tercer modo principal y la tercera frecuencia natural del sistema, el primero y segundo modos no aparecen en el proceso iterativo. De nuevo, esto se hace utilizando el principio de la ortogonalidad, que se expresa como:

$$m_1A_1A_3 + m_2B_1B_3 + m_3C_1C_3 = 0, \quad m_1A_2A_3 + m_2B_2B_3 + m_3C_2C_3 = 0$$

Para los modos primero y tercero, esto se convierte en

$$m(0,25)x_1 + m(0,6)x_2 + m(1,0)x_3 = 0$$

y para el segundo y tercer modos tenemos:

$$m(-1,0)x_1 + m(-1,4)x_2 + m(1,0)x_3 = 0 \quad \text{o} \quad x_1 = 8x_3, \quad x_2 = -5x_3, \quad x_3 = x_3$$

y en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Cuando esto se combina con la ecuación matricial del segundo modo, obtenemos la ecuación matricial del tercer modo:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & -2,6 & -6 \\ 0 & 0,4 & -3 \\ 0 & 0,4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{L\omega^2}{6g}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Suponga cualquier valor conveniente para el tercer modo y comience el proceso iterativo. Se encontrará que el modo de la forma $\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ se repite. Esto significa que $\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ es realmente el tercer modo del sistema. Así que,

$$1 = L\omega^2/6g \qquad \text{y} \qquad \omega_3 = 2,45\sqrt{g/L} \text{ rad/seg}$$

Por consiguiente las tres frecuencias naturales del péndulo triple están dadas por:

$$\omega_1 = 0,65\sqrt{g/L}, \quad \omega_2 = 1,52\sqrt{g/L}, \quad \omega_3 = 2,45\sqrt{g/L} \text{ rad/seg}$$

24. Determinar la frecuencia natural más alta del sistema masa-resorte de tres grados de libertad que se muestra en la figura 3-38. Utilizar el método de la matriz inversa.

Como se expresó anteriormente, las ecuaciones de deflexión de las masas son:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{2k}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Utilizando la teoría de la matriz inversa, esto se puede expresar como:

$$\frac{2k}{\omega^2 m}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad (1)$$

donde $[D]^{-1} = \begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}^{-1}$ es la inversa de la matriz $[D] = \begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$.

De la teoría matricial, la adjunta $[D]$ puede hallarse en la siguiente forma:

$$\text{Adjunta } [D] = \begin{bmatrix}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}\end{vmatrix}\\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}\\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{vmatrix}\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

y

$$|D| = \begin{vmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia,

$$[D]^{-1} = \frac{\text{Adjunta } [D]}{|D|} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}$$

La matriz inversa $[D]^{-1}$ también puede encontrarse por medio de las operaciones elementales siguientes:

Operación	$[D]$			$[D]^{-1}$		
Multiplicar $[D]$ por un factor 2	1	1/2	1/2	1	0	0
	1/2	1	1/2	0	1	0
	1/2	1/2	1	0	0	1
Fila (1) menos fila (2)	2	1	1	2	0	0
	1	2	1	0	2	0
	1	1	2	0	0	2
Fila (3) menos fila (2)	1	−1	0	2	−2	0
	1	2	1	0	2	0
	1	1	2	0	0	2
Fila (2) menos fila (3)	1	−1	0	2	−2	0
	1	2	1	0	2	0
	0	−1	1	0	−2	2
Fila (2) menos fila (1)	1	−1	0	2	−2	0
	1	3	0	0	4	−2
	0	−1	1	0	−2	2
Multiplicar la fila (2) por un factor 1/4	1	−1	0	2	−2	0
	0	4	0	−2	6	−2
	0	−1	1	0	−2	2
Sumar la fila (2) a la fila (1)	1	−1	0	2	−2	0
	0	1	0	−1/2	3/2	−1/2
	0	−1	1	0	−2	2
Sumar la fila (2) a la fila (3)	1	0	0	3/2	−1/2	−1/2
	0	1	0	−1/2	3/2	−1/2
	0	−1	1	0	−2	2
	1	0	0	3/2	−1/2	−1/2
	0	1	0	−1/2	3/2	−1/2
	0	0	1	−1/2	−1/2	3/2

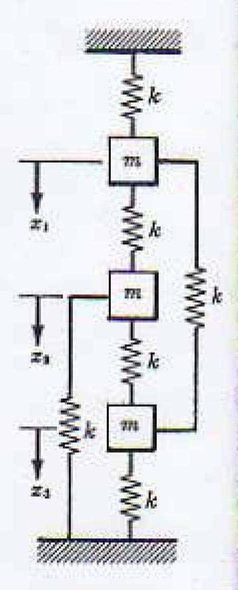


Fig. 3-38

que también nos da $[D]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Remplazando $[D]^{-1}$ en la ecuación (1), tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{2k}{\omega^2 m}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Supongamos que el tercer modo es $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y remplacémoslo en la ecuación (2) para obtener:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{\omega^2 m}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4k}{\omega^2 m}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El modo supuesto $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ se repite. Esto significa que el valor supuesto es el tercer modo. En consecuencia,

$$1 = 4k/\omega^2 m \qquad \text{y} \qquad \omega_3 = 2\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

25. Utilizar el método de la matriz inversa para determinar la frecuencia natural más alta del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-39.

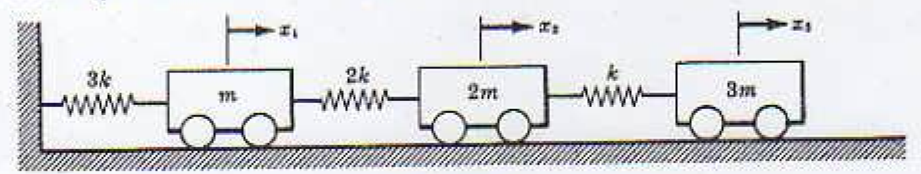


Fig. 3-39

De la teoría de los coeficientes de influencia, las ecuaciones de movimiento pueden expresarse como:

$$-x_1 = \alpha_{11} m \ddot{x}_1 + \alpha_{12} 2m \ddot{x}_2 + \alpha_{13} 3m \ddot{x}_3$$
$$-x_2 = \alpha_{21} m \ddot{x}_1 + \alpha_{22} 2m \ddot{x}_2 + \alpha_{23} 3m \ddot{x}_3$$
$$-x_3 = \alpha_{31} m \ddot{x}_1 + \alpha_{32} 2m \ddot{x}_2 + \alpha_{33} 3m \ddot{x}_3$$

donde $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 1/3k$; $\alpha_{21} = 1/3k$, $\alpha_{22} = \alpha_{23} = 5/6k$; $\alpha_{31} = 1/3k$, $\alpha_{32} = 5/6k$, $\alpha_{33} = 11/6k$.

Remplazando $\ddot{x}_i$ por $-\omega^2 x_i$, tenemos:

$$x_1 = \alpha_{11} m x_1 \omega^2 + 2\alpha_{12} m x_2 \omega^2 + 3\alpha_{13} m x_3 \omega^2$$
$$x_2 = \alpha_{21} m x_1 \omega^2 + 2\alpha_{22} m x_2 \omega^2 + 3\alpha_{23} m x_3 \omega^2 \qquad (1)$$
$$x_3 = \alpha_{31} m x_1 \omega^2 + 2\alpha_{32} m x_2 \omega^2 + 3\alpha_{33} m x_3 \omega^2$$

o, en notación matricial,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{6k}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \\ 2 & 10 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Utilizando la teoría de la matriz inversa, la ecuación (2) puede escribirse como:

$$\frac{6k}{\omega^2 m}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \\ 2 & 10 & 33 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

donde $[D]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \\ 2 & 10 & 33 \end{bmatrix}^{-1}$ es la inversa de $[D] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 10 & 15 \\ 2 & 10 & 33 \end{bmatrix}$.

Remplazando $[D]^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ en (3), tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Suponga que el tercer modo es $\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y comience el proceso iterativo con la ecuación (4).

Primera iteración:

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 58 \\ -16,5 \\ 1,7 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}(1,7)\begin{bmatrix} 34 \\ -9,7 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} 30 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 170 \\ -45,5 \\ 3,7 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}(3,7)\begin{bmatrix} 46 \\ -12,3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} 45 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 247 \\ -62 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}(4)\begin{bmatrix} 61 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración:

$$\begin{bmatrix} 60 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}\begin{bmatrix} 330 \\ -83 \\ 5,4 \end{bmatrix} = \frac{k}{m\omega^2}(5,4)\begin{bmatrix} 60,7 \\ -15,3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La columna supuesta se repite aproximadamente. Esto significa que el valor supuesto es correcto. En consecuencia,

$$1 = \frac{k}{m\omega^2}(5,4) \qquad \text{y} \qquad \omega_3 = 2,36\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

METODO STODOLA

26. Utilice el método Stodola para encontrar el modo fundamental de vibración y la frecuencia natural del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-40. $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ lb/pul, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ lb-seg²/pul.



Fig. 3-40

Suponga que el sistema está vibrando en uno de sus modos principales, con frecuencia natural ω y que su movimiento es periódico. Entonces el sistema obra según la fuerza de inercia $-m_i\ddot{x}_i$. Ahora,

$$x_i = A_i \text{ sen } \omega t \qquad \text{y} \qquad -m_i\ddot{x}_i = \omega^2 m_i A_i$$

El método Stodola puede establecerse en la siguiente forma tabular: suponiendo un conjunto arbitrario de valores para el modo principal fundamental, la fuerza de inercia que actúa sobre cada masa es igual al producto de la deflexión supuesta por el cuadrado de la frecuencia natural, como se muestra en la fila 2. La fuerza elástica en la fila 3 es igual a la fuerza total de inercia que actúa sobre cada resorte. La fila 4 se obtiene dividiendo la fila 3, término a término, por sus respectivas constantes elásticas. Las deflexiones calculadas en la fila 5 se encuentran sumando las deflexiones de los resortes con la masa cercana al extremo

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

fijo, que tiene la menor deflexión. Las deflexiones calculadas se comparan, entonces, con las deflexiones supuestas. Este proceso se continúa hasta que las deflexiones calculadas sean proporcionales a las deflexiones supuestas. Cuando esto se cumpla, las deflexiones supuestas representarán la configuración del modo principal fundamental de vibración del sistema.

	k_1	m_1	k_2	m_2	k_3	m_3
1. Deflexión supuesta		1		1		1
2. Fuerza de inercia		ω^2		ω^2		ω^2
3. Fuerza elástica	$3\omega^2$		$2\omega^2$		ω^2	
4. Deflexión del resorte	$3\omega^2$		$2\omega^2$		ω^2	
5. Deflexión calculada		$3\omega^2$		$5\omega^2$		$6\omega^2$
		1		1,67		2
1. Deflexión supuesta		1		1,67		2
2. Fuerza de inercia		ω^2		$1{,}67\omega^2$		$2\omega^2$
3. Fuerza elástica	$4{,}67\omega^2$		$3{,}67\omega^2$		$2\omega^2$	
4. Deflexión del resorte	$4{,}67\omega^2$		$3{,}67\omega^2$		$2\omega^2$	
5. Deflexión calculada		$4{,}67\omega^2$		$8{,}34\omega^2$		$10{,}34\omega^2$
		1		1,79		2,21
1. Deflexión supuesta		1		1,79		2,21
2. Fuerza de inercia		ω^2		$1{,}79\omega^2$		$2{,}21\omega^2$
3. Fuerza elástica	$5\omega^2$		$4\omega^2$		$2{,}21\omega^2$	
4. Deflexión del resorte	$5\omega^2$		$4\omega^2$		$2{,}21\omega^2$	
5. Deflexión calculada		$5\omega^2$		$9\omega^2$		$11{,}21\omega^2$
		1		1,8		2,24

La deflexión supuesta en este punto, $\begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}79 \\ 2{,}21 \end{bmatrix}$ es muy próxima a la deflexión calculada. Por tanto, el modo principal fundamental de vibración está dado por:

$$\begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}80 \\ 2{,}24 \end{bmatrix}$$

y la frecuencia natural fundamental se encuentra de:

$$1{,}00 + 1{,}80 + 2{,}24 = (5 + 9 + 11{,}21)\,\omega^2 \quad \text{o sea que} \quad \omega_1 = 0{,}44 \text{ rad/seg}$$

27. Utilizar el método Stodola para determinar la frecuencia fundamental más baja del sistema masa-resorte de cuatro grados de libertad que se muestra en la figura 3-41.

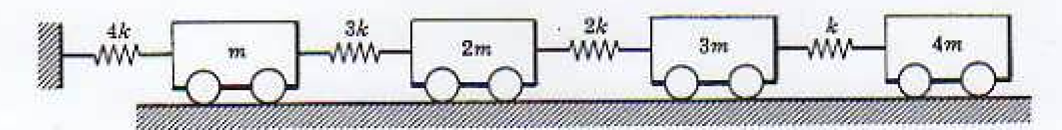


Fig. 3-41

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Véase en el problema 26 la explicación y el procedimiento.

	$k_1 = 4k$	$m_1 = m$	$k_2 = 3k$	$m_2 = 2m$	$k_3 = 2k$	$m_3 = 3m$	$k_4 = k$	$m_4 = 4m$
Deflexión supuesta		4,00		3,00		2,00		1,00
Fuerza de inercia		$4\omega^2$		$6\omega^2$		$6\omega^2$		$4\omega^2$
Fuerza elástica	$20\omega^2$		$16\omega^2$		$10\omega^2$		$4\omega^2$	
Deflexión del resorte	$5\omega^2$		$5,3\omega^2$		$5\omega^2$		$4\omega^2$	
Deflexión calculada		$5\omega^2$		$10,3\omega^2$		$15,3\omega^2$		$19,3\omega^2$
Deflexión supuesta		1,00		2,00		3,00		4,00
Fuerza de inercia		ω^2		$4\omega^2$		$9\omega^2$		$16\omega^2$
Fuerza elástica	$30\omega^2$		$29\omega^2$		$25\omega^2$		$16\omega^2$	
Deflexión del resorte	$7,5\omega^2$		$9,7\omega^2$		$12,5\omega^2$		$16\omega^2$	
Deflexión calculada		$7,5\omega^2$		$17,2\omega^2$		$29,7\omega^2$		$45,7\omega^2$
Deflexión supuesta		1,00		2,00		4,00		6,00
Fuerza de inercia		ω^2		$4\omega^2$		$12\omega^2$		$24\omega^2$
Fuerza elástica	$41\omega^2$		$40\omega^2$		$36\omega^2$		$24\omega^2$	
Deflexión del resorte	$10.25\omega^2$		$13.3\omega^2$		$18\omega^2$		$24\omega^2$	
Deflexión calculada		$10.25\omega^2$		$23.55\omega^2$		$41.55\omega^2$		$65.55\omega^2$
Deflexión supuesta		1.00		2.2		4.00		6.4
Fuerza de inercia		ω^2		$4.4\omega^2$		$12\omega^2$		$25.6\omega^2$
Fuerza elástica	$43\omega^2$		$42\omega^2$		$37.6\omega^2$		$25.6\omega^2$	
Deflexión del resorte	$10.75\omega^2$		$14\omega^2$		$18.8\omega^2$		$25.6\omega^2$	
Deflexión calculada		$10.75\omega^2$		$24.75\omega^2$		$43.55\omega^2$		$69.15\omega^2$
		1.00		2.30		4.05		6.42

Por consiguiente, el primer modo principal está dado por $\begin{bmatrix} 1,00 \\ 2,30 \\ 4,05 \\ 6,42 \end{bmatrix}$ y la frecuencia natural más baja se obtiene de:

$$(1 + 2,3 + 4,05 + 6,42) = (10,75 + 24,75 + 43,55 + 69,15)\,\omega^2 \quad \text{o} \quad 13,77 = 148,2\,\omega^2$$

Por consiguiente, $\omega_1^2 = 0.093$ y $\omega_1 = 0,306\sqrt{k/m}$ rad/seg

28. Probar que el método Stodola converge al modo fundamental de vibración.

El método Stodola se inicia con deflexiones supuestas del modo fundamental de un sistema. Las correspondientes fuerzas de inercia debidas a estas deflexiones se calculan. Comparando con las fuerzas de inercia y las deflexiones del sistema, las fuerzas de inercia recién encontradas producirán un nuevo conjunto de deflexiones, las cuales se usarán para comenzar la siguiente iteración. El proceso se repite. Con el tiempo este proceso convergerá hacia el modo fundamental; el grado de exactitud depende del número de iteraciones.

El movimiento general de un sistema de n grados de libertad está dado por

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + A_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi_n) \\ x_2 &= B_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + B_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi_n) \\ x_3 &= C_1 \operatorname{sen}(\omega_1 t + \psi_1) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_2 t + \psi_2) + \cdots + C_n \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (1)$$

Sean las deflexiones supuestas una superposición arbitraria de todos los modos del sistema, con constantes a_1, a_2, ..., a_n.

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 A_1 + a_2 A_2 + \cdots + a_n A_n \\ x_2 &= a_1 B_1 + a_2 B_2 + \cdots + a_n B_n \\ x_3 &= a_1 C_1 + a_2 C_2 + \cdots + a_n C_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (2)$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Las correspondientes fuerzas de inercia son

$$\begin{aligned} &m_1(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n)\omega^2 \\ &m_2(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_n B_n)\omega^2 \\ &m_3(\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n)\omega^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (3)$$

donde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son las masas del sistema y ω es la frecuencia natural.

Ahora, si el sistema está vibrando con todos los modos principales presentes, las fuerzas de inercia y las correspondientes deflexiones son

$$\begin{aligned} &m_1(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + \cdots + A_n\omega_n^2), \quad (A_1 + A_2 + \cdots + A_n) \\ &m_2(B_1\omega_1^2 + B_2\omega_2^2 + \cdots + B_n\omega_n^2), \quad (B_1 + B_2 + \cdots + B_n) \\ &m_3(C_1\omega_1^2 + C_2\omega_2^2 + \cdots + C_n\omega_n^2), \quad (C_1 + C_2 + \cdots + C_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (4)$$

Por tanto, las fuerzas de inercia en (3) producirán un nuevo conjunto de deflexiones:

$$\begin{aligned} &\omega^2(\alpha_1 A_1/\omega_1^2 + \alpha_2 A_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n A_n/\omega_n^2) \\ &\omega^2(\alpha_1 B_1/\omega_1^2 + \alpha_2 B_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n B_n/\omega_n^2) \\ &\omega^2(\alpha_1 C_1/\omega_1^2 + \alpha_2 C_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n C_n/\omega_n^2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (5)$$

Ahora,

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega^2(\alpha_1 A_1/\omega_1^2 + \alpha_2 A_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n A_n/\omega_n^2) \\ x_2 &= \omega^2(\alpha_1 B_1/\omega_1^2 + \alpha_2 B_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n B_n/\omega_n^2) \\ x_3 &= \omega^2(\alpha_1 C_1/\omega_1^2 + \alpha_2 C_2/\omega_2^2 + \cdots + \alpha_n C_n/\omega_n^2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (6)$$

Empleando las deflexiones indicadas en (6) como deflexiones supuestas y llevando a cabo exactamente las mismas etapas de la última iteración, tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega^4(\alpha_1 A_1/\omega_1^4 + \alpha_2 A_2/\omega_2^4 + \cdots + \alpha_n A_n/\omega_n^4) \\ x_2 &= \omega^4(\alpha_1 B_1/\omega_1^4 + \alpha_2 B_2/\omega_2^4 + \cdots + \alpha_n B_n/\omega_n^4) \\ x_3 &= \omega^4(\alpha_1 C_1/\omega_1^4 + \alpha_2 C_2/\omega_2^4 + \cdots + \alpha_n C_n/\omega_n^4) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (7)$$

Después de r iteraciones, las deflexiones supuestas toman la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega^{2r}(\alpha_1 A_1/\omega_1^{2r} + \alpha_2 A_2/\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n A_n/\omega_n^{2r}) \\ x_2 &= \omega^{2r}(\alpha_1 B_1/\omega_1^{2r} + \alpha_2 B_2/\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n B_n/\omega_n^{2r}) \\ x_3 &= \omega^{2r}(\alpha_1 C_1/\omega_1^{2r} + \alpha_2 C_2/\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n C_n/\omega_n^{2r}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (8)$$

o

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r})(A_1 + \alpha_2 A_2\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n A_n\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_n^{2r}) \\ x_2 &= (\alpha_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r})(B_1 + \alpha_2 B_2\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n B_n\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_n^{2r}) \\ x_3 &= (\alpha_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r})(C_1 + \alpha_2 C_2\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_2^{2r} + \cdots + \alpha_n C_n\omega_1^{2r}/\alpha_1\omega_n^{2r}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad (9)$$

Como $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \cdots < \omega_n$ y el número de iteraciones es suficientemente grande, o sea que el valor de r es un número suficientemente grande, las razones de las frecuencias naturales llegan a ser muy pequeñas. En la mayoría de los casos se necesitan menos de diez iteraciones para obtener el modo fundamental del sistema. De modo que para un número de iteraciones suficientemente grande, las deflexiones calculadas en (9) se convierten en

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 A_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r} \\ x_2 &= \alpha_1 B_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r} \\ x_3 &= \alpha_1 C_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r} \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \end{bmatrix} = \alpha_1\omega^{2r}/\omega_1^{2r}\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ \cdot \end{bmatrix}$$

que se aproxima mucho al modo fundamental puro de vibración del sistema.

Por tanto el método Stodola converge hacia el modo fundamental de vibración en un sistema de n grados de libertad.

METODO HOLZER

29. Utilice el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-42. Aquí $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ lb-seg²/pul.

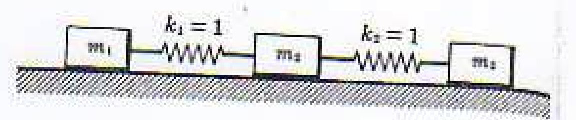


Fig. 3-42

Comience la tabla de Holzer con la columna de posición que indica las masas del sistema. La segunda columna es para los valores de las diferentes masas del sistema; esta información es dada. La tercera columna es el producto de la masa por el cuadrado de la frecuencia. En seguida vienen los desplazamientos que se obtienen restando de la fila anterior el desplazamiento total indicado en el extremo de la misma fila. La columna cinco es el producto de la columna tres por la columna cuatro. La fuerza total de inercia se inserta en la columna seis y es igual a la suma de la fuerza total de inercia en la fila anterior más la fuerza de inercia en la misma fila. Las columnas restantes son evidentes.

Se supone un desplazamiento inicial, generalmente igual a la unidad, por conveniencia. Si la frecuencia supuesta es una de las frecuencias naturales del sistema, la fuerza total final de inercia sobre el sistema será cero. Esto se debe a que el sistema tiene vibración libre. Si la fuerza total final de inercia no es igual a cero, la magnitud de esta fuerza da una idea de la discrepancia de la frecuencia supuesta.

Tabla

Posición	m_i	$m_i\omega^2$	x_i	$m_i x_i \omega^2$	$\sum_1^i m_i x_i \omega^2$	k_{ij}	$\sum_1^i m_i x_i \omega^2 / k_{ij}$
Frecuencia supuesta: $\omega = 0,5$							
1	1	0,25	1	0,25	0,25	1	0,25
2	1	0,25	0,75	0,19	0,44	1	−0,44
3	1	0,25	0,31	0,07	0,51		
Frecuencia supuesta: $\omega = 0,75$							
1	1	0,56	1	0,56	0,56	1	0,56
2	1	0,56	0,44	0,24	0,80	1	0,80
3	1	0,56	−0,36	−0,2	0,60		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,0$							
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1	1	1
3	1	1	−1	−1	0		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,5$							
1	1	2.25	1.0	2,25	2,25	1	2,25
2	1	2.25	−1,25	−2,82	−0,57	1	−0,57
3	1	2.25	−0,68	−1,53	−2,10		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,79$							
1	1	3.21	1	3.21	3,21	1	3,21
2	1	3.21	−2.21	−7.08	−3,87	1	−3,87
3	1	3.21	1.66	5.34	1,47		
Frecuencia supuesta: $\omega = 2,0$							
1	1	4	1	4	4	1	4
2	1	4	−3	−12	−8	1	−8
3	1	4	5	20	12		

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

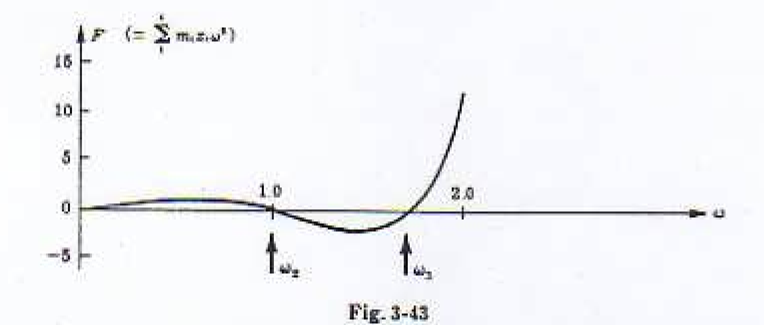


Fig. 3-43

Por consiguiente las frecuencias naturales son $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1{,}0$, $\omega_3 = 1{,}7$ rad/seg.

30. Utilizar el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema de cuatro masas que se muestra en la figura 3-44, si $k = 1$ lb/pul y $m = 1$ lb-seg^2/pul.

Véase el procedimiento dado en el problema 29.

Tabla

Item	m	$m\omega^2$	x	$mx\omega^2$	$\Sigma mx\omega^2$	k	$\Sigma mx\omega^2/k$
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}2$							
1	4	0,16	1	0,16	0,16	1	0,16
2	3	0,12	0,84	0,101	0,261	2	0,13
3	2	0,08	0,71	0,056	0,317	3	0,105
4	1	0,04	0,605	0,025	0,342	4	0,0855
5	∞	∞	0,5195				
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}3$							
1	4	0,36	1	0,36	0,36	1	0,36
2	3	0,27	0,64	0,173	0,533	2	0,267
3	2	0,18	0,373	0,067	0,600	3	0,200
4	1	0,09	0,173	0,0155	0,6155	4	0,1539
5	∞	∞	0,0192				
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}4$							
1	4	0,64	1	0,64	0,64	1	0,64
2	3	0,48	0,36	0,173	0,813	2	0,406
3	2	0,32	−0,046	−0,0147	0,798	3	0,266
4	1	0,16	−0,312	−0,049	0,748	4	0,187
5	∞	∞	−0,499				
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}6$							
1	4	1,44	1	1,44	1,44	1	1,44
2	3	1,08	−0,44	−0,475	0,965	2	0,482
3	2	0,72	−0,922	−0,664	0,301	3	0,100
4	1	0,36	−1,023	−0,368	−0,067	4	−0,017
5	∞	∞	−1,006				
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}8$							
1	4	2,56	1	2,56	2,56	1	2,56
2	3	1,92	−1,56	−3,00	−0,44	2	−0,22
3	2	1,28	−1,34	−1,72	−2,16	3	−0,73
4	1	0,64	−,61	−0,39	−2,55	4	−0,64
5	∞	∞	0,03				

Fig. 3-44

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Tabla (cont.)

Item	m	$m\omega^2$	x	$mx\omega^2$	$\Sigma mx\omega^2$	k	$\Sigma mx\omega^2/k$
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,0$							
1	4	4	1	4	4	1	4
2	3	3	−3	−9	−5	2	−2,5
3	2	2	−0,5	−1	−6	3	−2,0
4	1	1	1,5	1,5	−4,5	4	−1,13
5	∞	∞	2,63				
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,5$							
1	4	9	1	9	9	1	9
2	3	6,75	−8	−54	−45	2	−22,5
3	2	4,5	14,5	65,3	20,3	3	6,77
4	1	2,25	7,73	17,4	37,7	4	9,43
5	∞	∞	−1,70				
Frecuencia supuesta: $\omega = 1,8$							
1	4	12,96	1	12,96	12,96	1	12,96
2	3	9,72	−11,96	−116,4	−103,44	2	−51,72
3	2	6,48	39,76	257,7	154,26	3	51,42
4	1	3,24	−11,66	−37,8	116,46	4	29,12
5	∞	∞	−40,78				
Frecuencia supuesta: $\omega = 2,0$							
1	4	16	1	16	16	1	16
2	3	12	−15	−180	−164	2	−82
3	2	8	67	536	372	3	124
4	1	4	−57	−228	144	4	36
5	∞	∞	−93				
Frecuencia supuesta: $\omega = 2,5$							
1	4	25	1	25	25	1	25
2	3	18,75	−24	−450	−425	2	−212,5
3	2	12,5	188,5	2360	1935	3	645
4	1	6,25	−456,5	−2860	−925	4	−231
5	∞	∞	−225,5				
Frecuencia supuesta: $\omega = 3,0$							
1	4	36	1	36	36	1	36
2	3	27	−35	−945	−909	2	−455
3	2	18	420	7560	6651	3	2220
4	1	9	−1800	−16.200	−9550	4	−2388
5	∞	∞	588				

Trace la curva de las frecuencias supuestas contra las amplitudes del extremo fijo, como se muestra en la figura 3-45. Las frecuencias naturales del sistema están dadas por las intersecciones de la curva con el eje de frecuencia. Las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = 0,30 \text{ rad/seg}$$
$$\omega_2 = 0,81 \text{ rad/seg}$$
$$\omega_3 = 1,45 \text{ rad/seg}$$
$$\omega_4 = 2,83 \text{ rad/seg}$$

Nota: La curva no está hecha a escala.

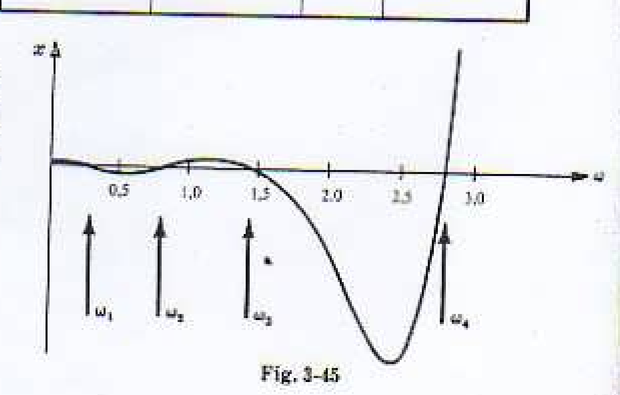


Fig. 3-45

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

SISTEMA BIFURCADO

31. En la figura 3-46 se muestra un sistema bifurcado de cuatro masas y cuatro resortes. Si las masas se están moviendo únicamente en la dirección vertical, deducir la ecuación de frecuencia del sistema.

Las ecuaciones de movimiento están dadas por $\Sigma F = ma$:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_2 - x_3) - k_4(x_2 - x_4)$$
$$m_3\ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2)$$
$$m_4\ddot{x}_4 = -k_4(x_4 - x_2)$$

Cambiando el orden, tenemos:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_3 + k_4)x_2 - k_3x_3 - k_4x_4 - k_2x_1 = 0$$
$$m_3\ddot{x}_3 + k_3x_3 - k_3x_2 = 0$$
$$m_4\ddot{x}_4 + k_4x_4 - k_4x_2 = 0$$

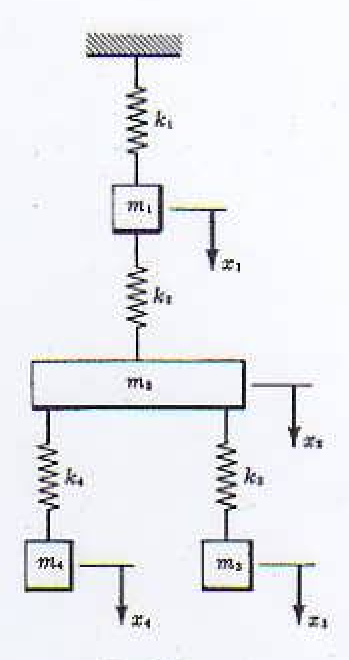


Fig. 3-46

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$x_1 = A\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_2 = B\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_3 = C\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_3 = -\omega^2 C\cos(\omega t + \psi)$$
$$x_4 = D\cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x}_4 = -\omega^2 D\cos(\omega t + \psi)$$

Al remplazar estas relaciones y simplificar el término $\cos(\omega t + \psi)$, las ecuaciones diferenciales de movimiento se convierten en un conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)A - k_2B = 0$$
$$-k_2A + (k_2 + k_3 + k_4 - m_2\omega^2)B - k_3C - k_4D = 0$$
$$-k_3B + (k_3 - m_3\omega^2)C = 0$$
$$-k_4B + (k_4 - m_4\omega^2)D = 0$$

de las cuales se obtiene la ecuación de frecuencia al igualar a cero el determinante de los coeficientes de A, B, C y D.

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2) & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 + k_4 - m_2\omega^2) & -k_3 & -k_4 \\ 0 & -k_3 & (k_3 - m_3\omega^2) & 0 \\ 0 & -k_4 & 0 & (k_4 - m_4\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando obtenemos:

$$\omega^8 - \left[\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3 + k_4}{m_2} + \frac{k_3}{m_3} + \frac{k_4}{m_4}\right]\omega^6$$
$$+ \left[\frac{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1 + k_1k_4 + k_2k_4}{m_1m_2} + \frac{k_2k_3 + k_3k_4}{m_2m_3} + \frac{k_1k_3 + k_2k_3}{m_1m_3} + \frac{k_2k_4 + k_3k_4}{m_2m_4} + \frac{k_1k_4 + k_2k_4}{m_1m_4} + \frac{k_3k_4}{m_3m_4}\right]\omega^4$$
$$- \left[\frac{k_1k_2k_3 + k_2k_3k_4 + k_3k_4k_1}{m_1m_2m_3} + \frac{k_2k_3k_4}{m_2m_3m_4} + \frac{(k_1 + k_2)k_3k_4}{m_3m_4m_1} + \frac{k_4(k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1)}{m_4m_1m_2}\right]\omega^2$$
$$+ \frac{k_1k_2k_3k_4}{m_1m_2m_3m_4} = 0$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

32. Utilizar el método iterativo matricial para encontrar la frecuencia fundamental del sistema bifurcado que se muestra en la figura 3-47.

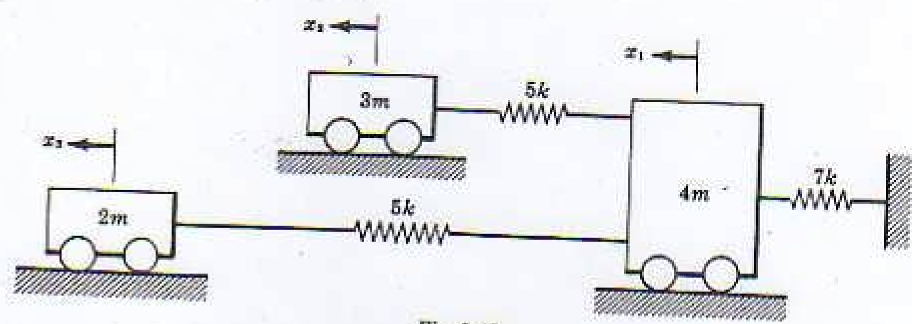


Fig. 3-47

De la teoría de los coeficientes de influencia se obtienen las siguientes ecuaciones de deflexión:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \alpha_{11}m_1 & \alpha_{12}m_2 & \alpha_{13}m_3 \\ \alpha_{21}m_1 & \alpha_{22}m_2 & \alpha_{23}m_3 \\ \alpha_{31}m_1 & \alpha_{32}m_2 & \alpha_{33}m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

donde $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 1/7k$, $\alpha_{21} = 1/7k$, $\alpha_{22} = 12/35k$, $\alpha_{23} = 1/7k$, $\alpha_{31} = \alpha_{32} = 1/7k$, $\alpha_{33} = 12/35k$; y $m_1 = 4m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$.

Remplazando estos valores en las ecuaciones de deflexión, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7{,}2 & 2 \\ 4 & 3 & 4{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Comience el proceso iterativo suponiendo un modo fundamental.

Primera iteración:

$$\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7{,}2 & 2 \\ 4 & 3 & 4{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 5{,}4 \\ 7{,}9 \\ 8{,}2 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k}(8{,}2) \begin{bmatrix} 0{,}66 \\ 0{,}96 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}9 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7{,}2 & 2 \\ 4 & 3 & 4{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}9 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 7{,}1 \\ 10{,}9 \\ 9{,}9 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k}(9{,}9) \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}1 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}1 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7{,}2 & 2 \\ 4 & 3 & 4{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}1 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 8{,}5 \\ 13{,}1 \\ 11{,}3 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k}(11{,}3) \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ 1{,}16 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

Cuarta iteración:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 7{,}2 & 2 \\ 4 & 3 & 4{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k} \begin{bmatrix} 8{,}8 \\ 13{,}8 \\ 11{,}6 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k}(11{,}6) \begin{bmatrix} 0{,}76 \\ 1{,}19 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$$

El modo supuesto $\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$ se repite aproximadamente en la última iteración, puesto que obtenemos $\begin{bmatrix} 0{,}76 \\ 1{,}19 \\ 1{,}00 \end{bmatrix}$. De modo que, aproximadamente,

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \end{bmatrix} = \frac{\omega^2 m}{7k}(11{,}6) \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ 1{,}2 \\ 1{,}0 \end{bmatrix}$$

o

$$1 = (\omega^2 m/7k)(11{,}6) \text{ y por tanto } \omega_1 = 0{,}78\sqrt{k/m} \text{ rad/seg}$$

33. Utilizar el método Stodola para determinar la frecuencia natural más baja del sistema bifurcado que se muestra en la figura 3-48.

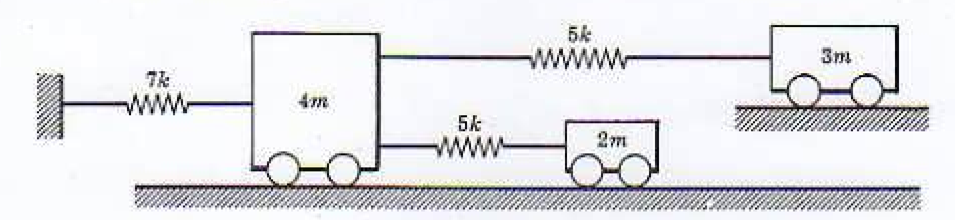


Fig. 3-48

Véase en el problema 26 la explicación del método Stodola.

	$k_1 = 7k$	$m_1 = 4m$	$k_2 = 5k$	$m_2 = 3m$	$k_3 = 5k$	$m_3 = 2m$
Deflexión supuesta		1		1		1
Fuerza de inercia		$4\omega^2$		$3\omega^2$		$2\omega^2$
Fuerza elástica	$9\omega^2$		$3\omega^2$		$2\omega^2$	
Deflexión del resorte	$1{,}3\omega^2$		$0{,}6\omega^2$		$0{,}4\omega^2$	
Deflexión calculada		$1{,}3\omega^2$		$1{,}9\omega^2$		$1{,}7\omega^2$
		1		1,46		1.31
Deflexión supuesta		1		1,4		1.3
Fuerza de inercia		$4\omega^2$		$4{,}2\omega^2$		$2{,}6\omega^2$
Fuerza elástica	$10{,}8\omega^2$		$4{,}2\omega^2$		$2{,}6\omega^2$	
Deflexión del resorte	$1{,}54\omega^2$		$0{,}84\omega^2$		$0{,}52\omega^2$	
Deflexión calculada		$1{,}54\omega^2$		$2{,}38\omega^2$		$2{,}06\omega^2$
		1		1,54		1,34
Deflexión supuesta		1		1,52		1,34
Fuerza de inercia		$4\omega^2$		$4{,}56\omega^2$		$2{,}68\omega^2$
Fuerza elástica	$11{,}24\omega^2$		$4{,}56\omega^2$		$2{,}68\omega^2$	
Deflexión del resorte	$1{,}61\omega^2$		$0{,}92\omega^2$		$0{,}53\omega^2$	
Deflexión calculada		$1{,}61\omega^2$		$2{,}53\omega^2$		$2{,}14\omega^2$
		1		1,56		1,32
Deflexión supuesta		1		1,56		1,32
Fuerza de inercia		$4\omega^2$		$4{,}68\omega^2$		$2{,}64\omega^2$
Fuerza elástica	$11{,}32\omega^2$		$4{,}68\omega^2$		$2{,}64\omega^2$	
Deflexión del resorte	$1{,}62\omega^2$		$0{,}93\omega^2$		$0{,}53\omega^2$	
Deflexión calculada		$1{,}62\omega^2$		$2{,}55\omega^2$		$2{,}15\omega^2$
		1		1,57		1,33

La deflexión supuesta en este punto, $\begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}56 \\ 1{,}32 \end{bmatrix}$, es muy próxima a la deflexión calculada. Por consiguiente el modo principal fundamental de vibración está dado por $\begin{bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}57 \\ 1{,}33 \end{bmatrix}$ y la frecuencia natural más baja se encuentra de

$$(1 + 1{,}57 + 1{,}33) = (1{,}62 + 2{,}55 + 2{,}15)\,\omega^2 \quad \text{o} \quad \omega_1 = 0{,}79\sqrt{k/m}\ \text{rad/seg}$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

METODO DE LA IMPEDANCIA MECANICA

34. Utilizar el método de la impedancia mecánica para encontrar la ecuación de frecuencia del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-49.

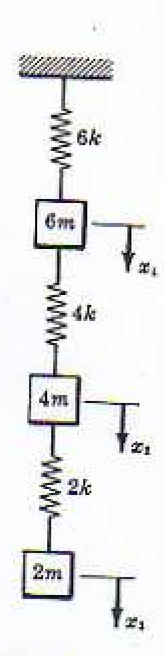


Fig. 3-49

Las impedancias mecánicas para el resorte y la masa son k y $-m\omega^2$, respectivamente. Para el empalme x_1, esto queda:

$$(6k + 4k - 6m\omega^2)x_1$$

donde el término de pérdida es $4kx_1$. Como no hay fuerza que actúe sobre el empalme x_1, se obtendrá la ecuación:

$$(6k + 4k - 6m\omega^2)x_1 - 4kx_2 = 0$$

Análogamente, para el empalme x_2 la ecuación es:

$$(4k + 2k - 4m\omega^2)x_2 - 4kx_1 - 2kx_3 = 0$$

donde $4kx_1$ y $2kx_3$ son los términos de pérdida.

Para el empalme x_3, la ecuación está dada por:

$$(2k - 2m\omega^2)x_3 - 2kx_2 = 0$$

Cambie el orden de la ecuación para obtener:

$$(10k - 6m\omega^2)x_1 - 4kx_2 = 0$$
$$-4kx_1 + (6k - 4m\omega^2)x_2 - 2kx_3 = 0$$
$$-2kx_2 + (2k - 2m\omega^2)x_3 = 0$$

Por consiguiente la ecuación de frecuencia está dada por:

$$\begin{vmatrix} (10k - 6m\omega^2) & -4k & 0 \\ -4k & (6k - 4m\omega^2) & -2k \\ 0 & -2k & (2k - 2m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

35. Utilizar el método de la impedancia mecánica para determinar las vibraciones del estado estacionario de las masas del sistema que se muestra en la figura 3-50. Sea $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$ lb/pul, $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$ seg-lb/pul, $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ lb-seg²/pul y $\omega = 1$ rad/seg.

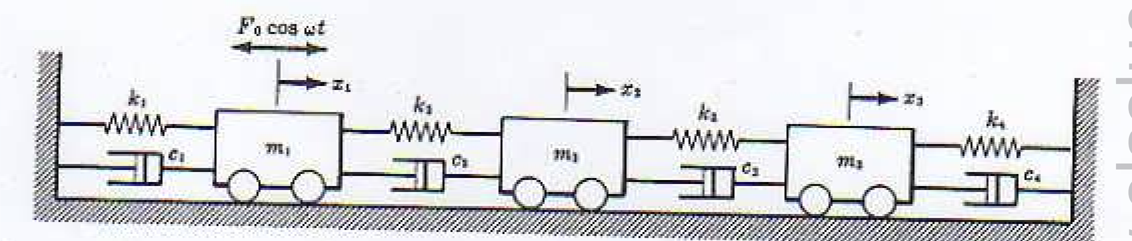


Fig. 3-50

Escribiendo la impedancia y la amplitud para el empalme x_1, obtenemos:

$$(k_1 + ic_1\omega - m_1\omega^2 + k_2 + ic_2\omega)x_1$$

y los términos de pérdida para el empalme x_1 son $k_2x_2 + ic_2\omega x_2$; por tanto, la primera ecuación está dada por:

$$(k_1 + k_2 + ic_1\omega + ic_2\omega - m_1\omega^2)x_1 - k_2x_2 - ic_2\omega x_2 = F_0$$

Similarmente, las ecuaciones para los empalmes x_2 y x_3 son:

$$(k_2 + k_3 + ic_2\omega + ic_3\omega - m_2\omega^2)x_2 - k_2x_1 - ic_2\omega x_1 - k_3x_3 - ic_3\omega x_3 = 0$$
$$(k_3 + k_4 + ic_3\omega + ic_4\omega - m_3\omega^2)x_3 - k_3x_2 - ic_3x_2\omega = 0$$

Remplazando los valores dados en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(1 + 2i)x_1 - (1 + i)x_2 = F_0$$
$$-(1 + i)x_1 + (1 + 2i)x_2 - (1 + i)x_3 = 0$$
$$-(1 + i)x_2 + (1 + 2i)x_3 = 0$$

Resolviendo por la regla de Cramer,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -(1+i) & 0 \\ 0 & (1+2i) & -(1+i) \\ 0 & -(1+i) & (1+2i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+2i) & -(1+i) & 0 \\ -(1+i) & (1+2i) & -(1+i) \\ 0 & -(1+i) & (1+2i) \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} (1+2i) & F_0 & 0 \\ -(1+i) & 0 & -(1+i) \\ 0 & 0 & (1+2i) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+2i) & -(1+i) & 0 \\ -(1+i) & (1+2i) & -(1+i) \\ 0 & -(1+i) & (1+2i) \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} (1+2i) & -(1+i) & F_0 \\ -(1+i) & (1+2i) & 0 \\ 0 & -(1+i) & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+2i) & -(1+i) & 0 \\ -(1+i) & (1+2i) & -(1+i) \\ 0 & -(1+i) & (1+2i) \end{vmatrix}}$$

Desarrollando los determinantes obtenemos:

$$x_1 = \frac{F_0(1+2i)(1+2i) - F_0(1+i)^2}{(1+2i)^3 - (1+2i)(1+i)^2 - (1+2i)(1+i)^2}$$

$$x_2 = \frac{F_0(1+i)(1+2i)}{(1+2i)^3 - (1+2i)(1+i)^2 - (1+2i)(1+i)^2}$$

$$x_3 = \frac{F_0(1+i)^2}{(1+2i)^3 - (1+2i)(1+i)^2 - (1+2i)(1+i)^2}$$

La ecuación para x_1 se reduce a:

$$x_1 = \frac{F_0(3-2i)}{(3+6i)} = \frac{13F_0}{(-3+24i)}$$

Por consiguiente el valor numérico de la amplitud de x_1 es:

$$\frac{13F_0}{\sqrt{9+24^2}} = 0{,}54F_0 \qquad \text{y el ángulo de fase} \qquad \phi = \tan^{-1}(24/-3) = -82{,}9^\circ$$

Así que la respuesta del estado estacionario de la masa m_1 es:

$$x_1(t) = 0{,}54F_0 \cos(\omega t - 82{,}9^\circ)$$

Se pueden encontrar expresiones análogas para las masas m_2 y m_3

$$x_2(t) = 0{,}47F_0 \cos(\omega t - 45^\circ)$$
$$x_3(t) = 0{,}29F_0 \cos(\omega t - 26{,}7^\circ)$$

PRINCIPIO DE LA ORTOGONALIDAD

36. Demostrar que el principio de la ortogonalidad se satisface en el problema 8.

Para sistemas de tres grados de libertad el principio de la ortogonalidad puede escribirse:

$$m_1A_1A_2 + m_2B_1B_2 + m_3C_1C_2 = 0$$
$$m_1A_2A_3 + m_2B_2B_3 + m_3C_2C_3 = 0$$
$$m_1A_3A_1 + m_2B_3B_1 + m_3C_3C_1 = 0$$

donde las m son las masas y las A, las B y las C son las amplitudes de vibración del sistema.

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

El movimiento general del problema es:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(t + \pi/2) + \tfrac{1}{6}\,\text{sen}\,(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$
$$x_2(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\,(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$
$$x_3(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(t + \pi/2) + \tfrac{1}{6}\,\text{sen}\,(\sqrt{3}\,t + \pi/2)$$

Remplazando las correspondientes amplitudes de vibración en las ecuaciones del principio de la ortogonalidad, obtenemos:

$$m(\tfrac{1}{3})(-\tfrac{1}{2}) + m(\tfrac{1}{3})(0) + m(\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}) = 0$$
$$m(-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{6}) + m(0)(\tfrac{1}{3}) + m(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{6}) = 0$$
$$m(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{3}) + m(-\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{3}) + m(\tfrac{1}{6})(\tfrac{1}{3}) = 0$$

Por tanto, el principio de la ortogonalidad se satisface completamente.

Problemas propuestos

37. Deducir las ecuaciones de movimiento del sistema que se muestra en la figura 3-51. Las varillas de unión no tienen peso y su movimiento está restringido al plano del papel.

Resp.
$$4m\ddot{\theta}_1 + 2k\theta_1 - k\theta_2 = 0$$
$$4m\ddot{\theta}_2 + 2k\theta_2 - k\theta_3 - k\theta_1 = 0$$
$$4m\ddot{\theta}_3 + 2k\theta_3 - k\theta_2 = 0$$

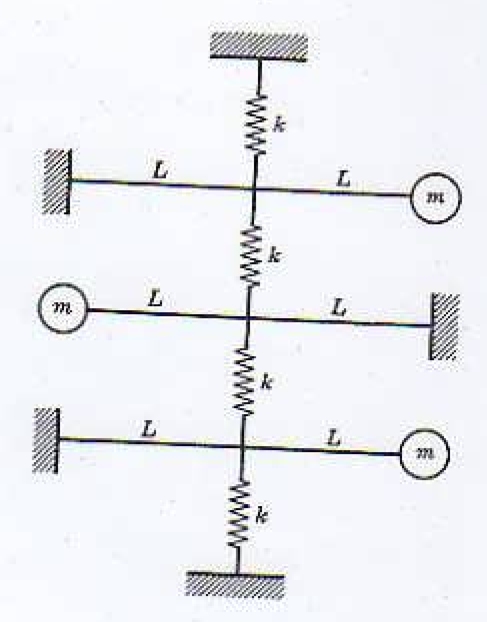


Fig. 3-51

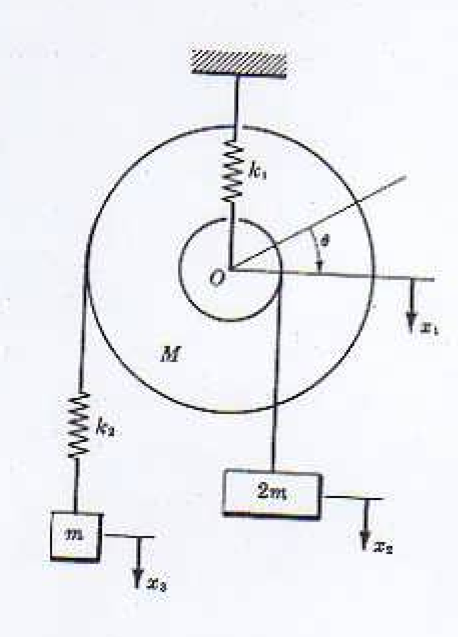


Fig. 3-52

38. Un cilindro circular homogéneo de masa total M y radio $2a$ está suspendido por medio de un resorte de rigidez k_1 y es libre de girar con respecto a su centro de masa O, como se muestra en la figura 3-52. Deducir las ecuaciones de movimiento.

Resp.
$$3M\ddot{x}_1 + (k_1 + 9k_2)x_1 - 2M\ddot{x}_2 - 6k_2x_2 - 3k_2x_3 = 0$$
$$(2M + 2m)\ddot{x}_2 + 4k_2x_2 + 2k_2x_3 - 2M\ddot{x}_1 - 6k_2x_1 = 0$$
$$m\ddot{x}_3 + k_2x_3 - 3k_2x_1 + 2k_2x_2 = 0$$

39. Calcular las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-53.

Resp. $\omega_1 = 0{,}39\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 1{,}47\sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 2{,}36\sqrt{k/m}$ rad/seg

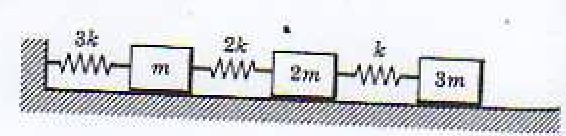


Fig. 3-53

40. La constante de elasticidad equivalente del voladizo es $K = 10$ lb/pul y además $k = 1$ lb/pul y $m = 1$ lb-seg²/pul. Calcular las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-54.
Resp. $\omega_1 = 3{,}16$, $\omega_2 = 3{,}34$, $\omega_3 = 3{,}62$ rad/seg

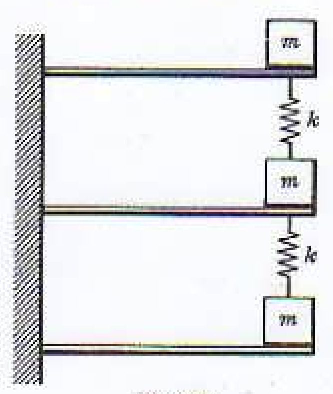


Fig. 3-54

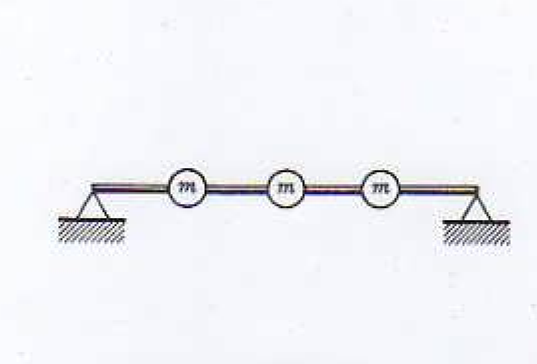


Fig. 3-55

Fig. 3-56

41. Calcular las frecuencias naturales de una viga simplemente apoyada de longitud L que tiene sujetas a ella tres masas iguales, a iguales distancias, como se muestra en la figura 3-55.
Resp. $\omega_1 = 4{,}97\sqrt{EI/mL^3}$, $\omega_2 = 19{,}6\sqrt{EI/mL^3}$, $\omega_3 = 41{,}7\sqrt{EI/mL^3}$ rad/seg

42. Determinar el movimiento general del sistema que se muestra en la figura 3-56.
Resp.

$$x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \phi_1) + A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3k/m}\,t + \phi_2) + A_3 \operatorname{sen}(\sqrt{4k/m}\,t + \phi_3)$$
$$x_2(t) = 2A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \phi_1) - A_3 \operatorname{sen}(\sqrt{4k/m}\,t + \phi_3)$$
$$x_3(t) = A_1 \operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t + \phi_1) - A_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3k/m}\,t + \phi_2) + A_3 \operatorname{sen}(\sqrt{4k/m}\,t + \phi_3)$$

43. La figura 3-57 muestra una fuerza de excitación F_0 sen ωt aplicada al centro de masa del sistema. Determinar la amplitud de la respuesta del estado estacionario de la primera masa del sistema.

Resp. $$x_1(t) = \frac{F_0 k(2k - m\omega^2)}{\omega^6 - (6k/m)\omega^4 + (10k^2/m^2)\omega^2 - 4k^3/m^3}$$

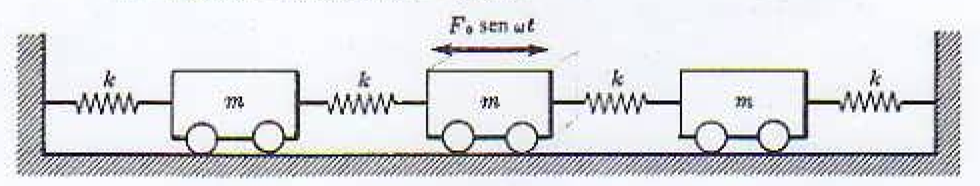


Fig. 3-57

44. Determinar las frecuencias naturales del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-58; $m = k = 1$.
Resp. $\omega_1 = 0{,}62$, $\omega_2 = 1{,}18$, $\omega_3 = 1{,}62$, $\omega_4 = 1{,}9$ rad/seg



Fig. 3-58

45. Calcular las frecuencias naturales de una viga simplemente apoyada de longitud L que tiene aseguradas cuatro masas iguales a distancias iguales, como se muestra en la figura 3-59.

Resp. $\omega_1 = 4{,}97\sqrt{EI/mL^3}$, $\omega_2 = 19{,}6\sqrt{EI/mL^3}$, $\omega_3 = 42{,}1\sqrt{EI/mL^3}$, $\omega_4 = 55{,}4\sqrt{EI/mL^3}$ rad/seg



Fig. 3-59

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

COEFICIENTES DE INFLUENCIA

46. Encontrar los coeficientes de influencia del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-60.
Resp. $\alpha_{11} = 1/2k$, $\alpha_{12} = 1/2k$, $\alpha_{21} = 1/2k$, $\alpha_{22} = 3/2k$

47. Determinar los coeficientes de influencia del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-61.
Resp. $\alpha_{11} = 1/3k$, $\alpha_{12} = 1/3k$, $\alpha_{13} = 1/3k$
$\alpha_{21} = 1/3k$, $\alpha_{22} = 5/6k$, $\alpha_{23} = 5/6k$
$\alpha_{31} = 1/3k$, $\alpha_{32} = 5/6k$, $\alpha_{33} = 11/6k$

48. Una viga simplemente apoyada de longitud L tiene tres masas iguales aseguradas a ella, a distancias iguales, como se muestra en la figura 3-62. Determinar los coeficientes de influencia.
Resp. $\alpha_{11} = 3L^3/256EI$ $\quad \alpha_{12} = 3{,}67L^3/256EI$ $\quad \alpha_{13} = 2{,}33L^3/256EI$
$\alpha_{21} = 3.67L^3/256EI$ $\quad \alpha_{22} = 5{,}33L^3/256EI$ $\quad \alpha_{23} = 3{,}67L^3/256EI$
$\alpha_{31} = 2.33L^3/256EI$ $\quad \alpha_{32} = 3{,}67L^3/256EI$ $\quad \alpha_{33} = 3L^3/256EI$

Fig. 3-60

Fig. 3-61

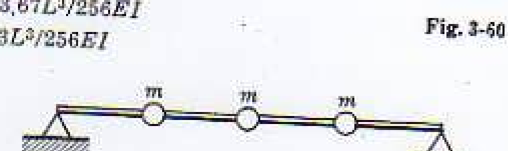


Fig. 3-62

MATRICES

49. Resolver el problema 5 por el método matricial.

50. Determinar la matriz dinámica del sistema bifurcado que se muestra en la figura 3-63. ¿Cuáles son las coordenadas principales?

$$Resp.\quad [C] = \begin{bmatrix} k/m & -2k/3m & -k/3m \\ -2k/m & 2k/m & 0 \\ -k/m & 0 & 2k/m \end{bmatrix}$$

$p_1 = 0{,}36x_1 - 0{,}13x_2 + 0.06x_3$
$p_2 = 0{,}2x_2 + 0.33x_3$
$p_3 = -0{,}36x_1 - 0{,}13x_2 + 0{,}14x_3$

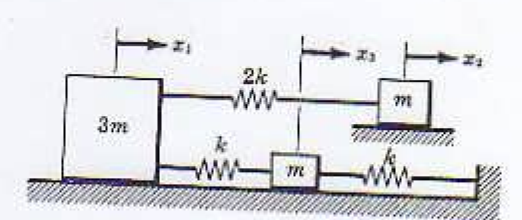


Fig. 3-63

51. Utilizando el método de la matriz inversa, calcular la frecuencia natural más alta del sistema que se muestra en la figura 3-55.

52. Utilizar la iteración matricial para determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-4.

METODO STODOLA

53. Emplear el método Stodola para encontrar la frecuencia fundamental del sistema que se muestra en la figura 3-64. m_1 y m_2 pesan 4 lb y 6 lb, respectivamente. $k_1 = 5$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$ lb/pul; la polea pesa 50 lb y tiene un radio de giro de 6 pul.
Resp. $\omega = 9{,}7$ rad/seg

54. Utilizar el método Stodola para encontrar la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-65. $m_1 = 6$, $m_2 = 8$, $m_3 = 10$ lb-seg²/pul; $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 8$, $k_4 = 4$, $k_5 = 2$, $k_6 = 5$ lb/pul.
Resp. $\omega = 0{,}61$ rad/seg

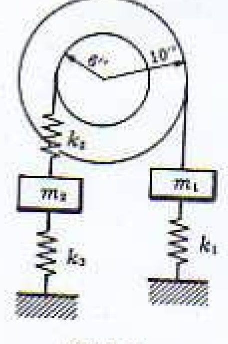


Fig. 3-64

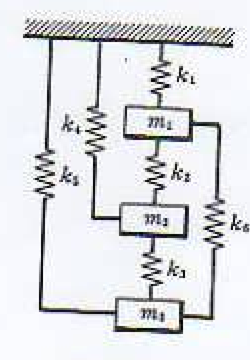


Fig. 3-65

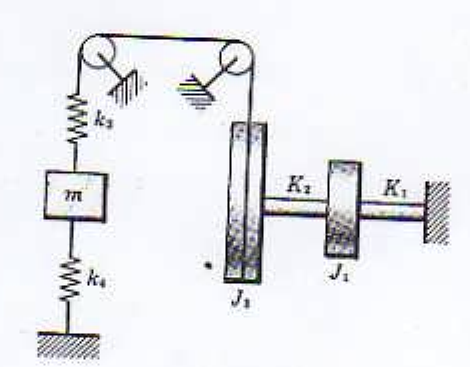


Fig. 3-66

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

55. Encontrar la frecuencia fundamental del sistema que se muestra en la figura 3-66 por el método Stodola. Suponga que los ejes y las poleas carecen de peso. $K_1 = 20$, $K_2 = 50$ pul-lb/rad; $k_3 = 5$, $k_4 = 4$ lb/pul; $m = 3$ lb-seg²/pul; $J_1 = 100$, $J_2 = 400$. *Resp.* $\omega = 5{,}25$ rad/seg

56. Una locomotora que pesa 64.400 lb está acoplada a tres vagones, como se muestra en la figura 3-67. Los vagones primero y tercero pesan 32.200 lb cada uno y el segundo pesa 16.100 lb. La constante de elasticidad de los resortes de acoplamiento es $K = 10.000$ lb/pul. ¿Cuál será la frecuencia natural más baja? *Resp.* $\omega = 7{,}4$ rad/seg

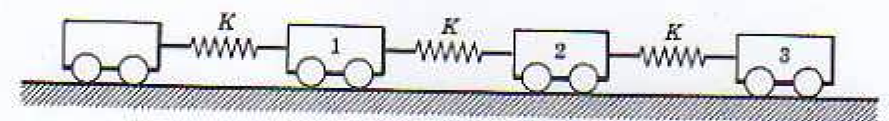


Fig. 3-67

METODO HOLZER

57. Para el sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-68, encontrar todas las frecuencias, si $k_1 = k_7 = 0$, $k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k$, y $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m$.
Resp. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0{,}52\sqrt{k/m}$, $\omega_3 = \sqrt{k/m}$, $\omega_4 = 1{,}4\sqrt{k/m}$, $\omega_5 = 1{,}73\sqrt{k/m}$, $\omega_6 = 1{,}93\sqrt{k/m}$ rad/seg

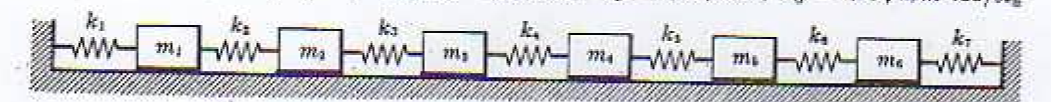


Fig. 3-68

58. Utilizar el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema masa-resorte que se muestra en la figura 3-68. $k_1 = 0$ y todas las demás constantes de elasticidad son iguales a k; todas las masas son iguales a m.
Resp. $\omega_1 = 0{,}24\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 0{,}71\sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 1{,}14\sqrt{k/m}$, $\omega_4 = 1{,}49\sqrt{k/m}$, $\omega_5 = 1{,}77\sqrt{k/m}$, $\omega_6 = 1{,}94\sqrt{k/m}$ rad/seg

59. Si todas las constantes de elasticidad son iguales a k y todas las masas son iguales a m, encontrar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 3-68.
Resp. $\omega_1 = 0{,}45\sqrt{k/m}$, $\omega_2 = 0{,}87\sqrt{k/m}$, $\omega_3 = 1{,}25\sqrt{k/m}$, $\omega_4 = 1{,}56\sqrt{k/m}$, $\omega_5 = 1{,}80\sqrt{k/m}$, $\omega_6 = 1{,}95\sqrt{k/m}$ rad/seg

60. Verificar el resultado del problema 56 por medio del método Holzer.

SISTEMAS BIFURCADOS

61. Suponiendo que todas las superficies en contacto carecen de rozamiento, encuentre los coeficientes de influencia del sistema que se muestra en la figura 3-69.
Resp. $\alpha_{11} = 2/k$, $\alpha_{12} = 2/k$, $\alpha_{13} = 1/k$, $\alpha_{21} = 2/k$, $\alpha_{22} = 1/2k$, $\alpha_{23} = 1/k$, $\alpha_{31} = 1/k$, $\alpha_{32} = 1/k$, $\alpha_{33} = 1/k$

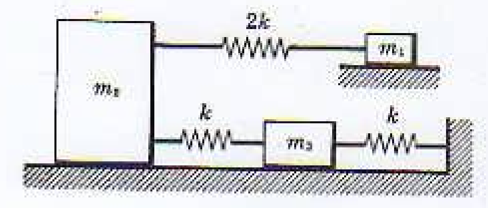


Fig. 3-69

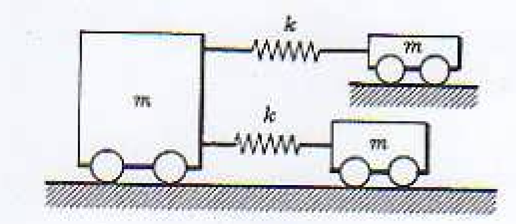


Fig. 3-70

62. Determinar las frecuencias de oscilación del sistema que se muestra en la figura 3-70.
Resp. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, $\omega_3 = \sqrt{3k/m}$ rad/seg

63. Deducir la ecuación de frecuencia del sistema que se muestra en la figura 3-7 por el método de la impedancia mecánica.

64. Demostrar que el principio de la ortogonalidad para sistemas de n grados de libertad puede expresarse como:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i A_i^r A_i^s = 0$$

donde A_i son las amplitudes de vibración en los modos principales y r y s son los modos principales del sistema.

65. Verificar el movimiento general del sistema que se da en el problema 42 por medio del principio de la ortogonalidad.

www.elsolucionario.net

Capítulo 4

Vibración torsional

INTRODUCCION

Vibración torsional es el movimiento angular periódico de ejes elásticos que tienen discos rígidamente unidos a ellos.

Debido a que hay semejanzas muy estrechas entre las vibraciones rectilíneas y las torsionales, la teoría y el análisis explicados para las primeras, pueden ser aplicados igualmente para las segundas. La siguiente tabla muestra las analogías existentes entre los dos tipos de vibración.

Analogía entre la vibración rectilínea y la torsional

	Vibración rectilínea		Vibración torsional	
	Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
Tiempo	t	seg	t	seg
Desplazamiento	x	pul	θ	rad
Velocidad	$\dot{x}$	pul/seg	$\dot{\theta}$	rad/seg
Aceleración	$\ddot{x}$	pul/seg²	$\ddot{\theta}$	rad/seg²
Constante elástica	k	lb/pul	K	pul-lb/rad
Coeficiente de amortig.	c	lb-seg/pul	η	pul-lb-seg/rad
Factor de amortig.	ζ	adimensional	ζ	adimensional
Masa	m	lb-seg²/pul	J	lb-pul-seg²/rad
Fuerza o momento torsional	$F = m\ddot{x}$	lb	$T = J\ddot{\theta}$	pul-lb
Momento	$m\dot{x}$	lb-seg	$J\dot{\theta}$	pul-lb-seg
Impulso	Ft	lb-seg	Tt	pul-lb-seg
Energía cinética	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	lb-pul	$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$	lb-pul
Energía potencial	$\frac{1}{2}kx^2$	lb-pul	$\frac{1}{2}K\theta^2$	lb-pul
Trabajo	$\int F\,dx$	lb-pul	$\int T\,d\theta$	lb-pul
Frecuencia natural	$\omega_n = \sqrt{k/m}$	rad/seg	$\omega_n = \sqrt{K/J}$	rad/seg
Ecuación de movimiento	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \text{ sen } \omega t$		$J\ddot{\theta} + \eta\dot{\theta} + K\theta = T_0 \text{ sen } \omega t$	
Condiciones iniciales	$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$		$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$	
Respuestas transitorias	$x_c = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi)$ $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$		$\theta_c = Ae^{-\zeta\omega_n t} \text{ sen } (\omega_d t + \phi)$ $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$	
Respuestas del estado estacionario	$x_p = X \text{ sen } (\omega t - \psi)$ $X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$		$\theta_p = \Phi \text{ sen } (\omega t - \psi)$ $\Phi = \frac{T_0}{\sqrt{(K-J\omega^2)^2 + (\eta\omega)^2}}$	

Problemas resueltos

1. Un disco de momento de inercia J está unido al extremo inferior de un eje vertical elástico. Si la masa del eje es pequeña y el eje tiene una rigidez torsional K, deducir la ecuación diferencial de movimiento para la vibración torsional libre del disco. ¿Cuál es su frecuencia natural?

Método de la energía:

La configuración del sistema puede determinarse por la cantidad de torsión del eje, o sea por el ángulo θ, como se indica en la figura 4-1. Como el disco está rígidamente unido al extremo del eje, la posición angular del disco en un instante cualquiera está dada por el ángulo θ.

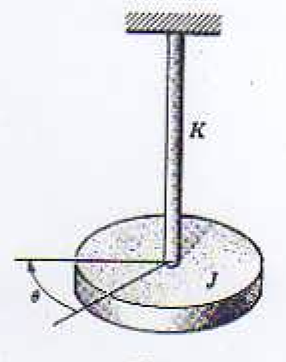


Fig. 4-1

La energía cinética del sistema está dada por:

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

y la energía potencial por:

$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}K\theta^2$$

Ahora,

$$\frac{d}{dt}(\text{E.C.} + \text{E.P.}) = 0 \quad \text{o sea} \quad (J\ddot{\theta}\dot{\theta} + K\theta\dot{\theta}) = 0$$

Puesto que $\dot{\theta}$ no es siempre igual a cero,

$$J\ddot{\theta} + K\theta = 0 \qquad \text{y} \qquad \omega_n = \sqrt{K/J} \text{ rad/seg}$$

Ley del movimiento de Newton:

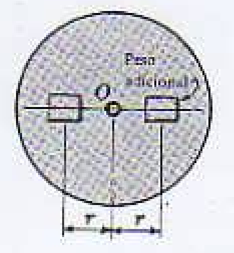
Debido a que el eje es elástico, el momento torsional ejercido por el eje sobre el disco debe ser proporcional pero de sentido opuesto al ángulo de torsión θ, es decir,

$$J\ddot{\theta} = -K\theta \qquad \text{o} \qquad J\ddot{\theta} + K\theta = 0$$

donde K es la rigidez torsional del eje, definida como el momento torsional necesario para producir un radián de torsión, expresado en pul-lb. Por tanto,

$$\omega_n = \sqrt{K/J} \text{ rad/seg}$$

2. Para determinar el momento de inercia de un volante se colocan dos pesos iguales sobre uno de los diámetros del volante, a iguales distancias del centro O. En seguida se miden las frecuencias naturales de oscilación del volante, el cual está colocado en el extremo de un eje elástico, con los pesos adicionales y luego sin éstos. Deducir la expresión del momento de inercia I del volante.



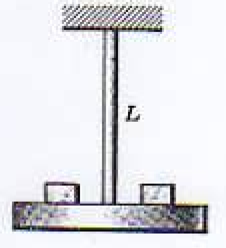


Fig. 4-2

Para vibración torsional libre la frecuencia natural está dada por:

$$\omega_1^2 = JG/IL \text{ (rad/seg)}^2$$

donde I es el momento de inercia de la masa del volante, expresado en pul-lb-seg², G es el módulo cortante de elasticidad, J es el momento rectangular de inercia, expresado en pul⁴ y L es la longitud del eje.

Cuando se agregan los dos pesos, como se indica, la frecuencia natural se convierte en:

$$\omega_2^2 = JG/(I + 2mr^2)L$$

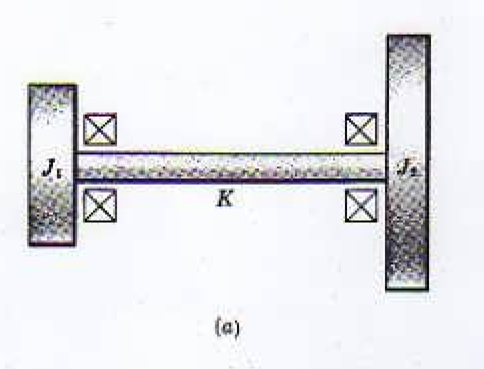
Comparando las dos frecuencias naturales obtenemos:

$$\omega_1^2/\omega_2^2 = \frac{JG/IL}{JG/(I+2mr^2)L} = \frac{I+2mr^2}{I}$$

de donde

$$I = \frac{2mr^2\omega_2^2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \text{ pul-lb-seg}^2$$

3. Determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 4-3, suponiendo que la masa del eje es pequeña comparada con las masas de los rotores.



(a)

θ_1 Nodo θ_2

(b)

Fig. 4-3

Cuando se aplican momentos torsionales iguales y opuestos a los dos rotores y se quitan repentinamente, éstos ejecutarán una vibración torsional libre. Los dos rotores se mueven en sentidos opuestos.

Sean θ_1 y θ_2 los ángulos de rotación de los rotores A y B, respectivamente. Aplicando la ecuación de momento torsional, las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 + \theta_2) = 0$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 + \theta_1) = 0$$

donde K es la rigidez torsional del eje y J_1 y J_2 son los momentos masa de inercia de los rotores.

Suponga que el movimiento es periódico y está compuesto de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$\theta_1 = A \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad \text{y} \quad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } (\omega t + \phi)$$
$$\theta_2 = B \text{ sen } (\omega t + \phi) \quad \text{y} \quad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } (\omega t + \phi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento y simplificando, obtenemos:

$$(K - J_1\omega^2)A + KB = 0$$
$$KA + (K - J_2\omega^2)B = 0$$

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B. La solución $A = B = 0$ sencillamente define la posición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (K - J_1\omega^2) & K \\ K & (K - J_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos el determinante para obtener la ecuación de frecuencia $\omega^2[\omega^2 J_1 J_2 - K(J_1 + J_2)] = 0$; por tanto,

$$\omega_1 = 0 \quad \text{y} \quad \omega_2 = \sqrt{K(J_1 + J_2)/J_1 J_2} \text{ rad/seg}$$

Las razones de amplitud se obtienen de las ecuaciones algebraicas y están dadas por:

$$\frac{A}{B} = \frac{-K}{(K - J_1\omega^2)} = \frac{-(K - J_2\omega^2)}{K} \quad \text{y} \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{-KJ_2}{KJ_2 - K(J_1 + J_2)} = \frac{J_2}{J_1}$$

La forma del segundo modo está dibujada en la figura 4-3(b). En el punto nodal el eje está inmóvil.

Las frecuencias naturales también pueden encontrarse directamente, resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones de movimiento. Multiplicando la primera ecuación de movimiento por J_2 y la segunda por J_1, obtenemos:

$$J_1 J_2 \ddot{\theta}_1 + KJ_2(\theta_1 + \theta_2) = 0$$
$$J_1 J_2 \ddot{\theta}_2 + KJ_1(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

Sumándolas tenemos:

$$J_1 J_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + K(J_1 + J_2)(\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad \text{y por tanto,} \quad \omega_n = \sqrt{K(J_1 + J_2)/J_1 J_2} \text{ rad/seg}$$

4. Un eje de acero está compuesto de dos ejes de longitudes L_1 y L_2 y diámetros d_1 y d_2, como se muestra en la figura 4-4. Encontrar el eje equivalente de este eje de acero.

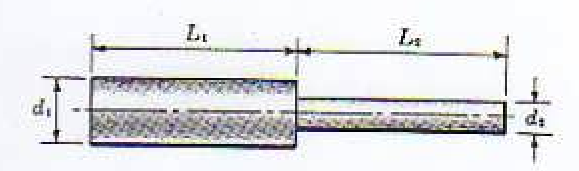


Fig. 4-4

El eje equivalente se define como un eje de longitud L y diámetro constante d que tiene la misma rigidez torsional K del eje dado.

Consideremos la acción ejercida por un momento torsional aplicado en un extremo del eje dado. El momento torsional se trasmitirá desde el extremo del eje de diámetro d_1 hasta el extremo del eje de diámetro d_2 a través del punto de unión entre los dos ejes. El ángulo total de torsión de todo el eje está dado por:

$$\theta = \theta_1(\text{torsión del eje de diámetro } d_1) + \theta_2(\text{torsión del eje de diámetro } d_2)$$
$$= \frac{32TL_1}{\pi d_1^4 G} + \frac{32TL_2}{\pi d_2^4 G}$$

donde T es el momento torsional aplicado y G es el módulo cortante de elasticidad.

El ángulo total de torsión de todo el eje puede expresarse como:

$$\theta = \frac{32T}{\pi G d_1^4}\left[L_1 + \frac{d_1^4}{d_2^4}L_2\right] \quad \text{o} \quad \frac{32T}{\pi G d_2^4}\left[L_2 + \frac{d_2^4}{d_1^4}L_1\right]$$

Por consiguiente el eje equivalente es un eje de diámetro constante d_1 y longitud $(L_1 + d_1^4 L_2/d_2^4)$ o un eje de diámetro constante d_2 y longitud $(L_2 + d_2^4 L_1/d_1^4)$.

5. Determinar la ecuación de frecuencia y el movimiento general del sistema torsional de dos grados de libertad que se muestra en la figura 4-5.

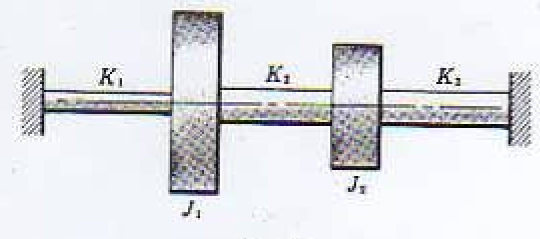


Fig. 4-5

Sean θ_1 y θ_2 los desplazamientos angulares de los rotores J_1 y J_2, respectivamente. Aplicando la ecuación de momento torsional $\Sigma M = J\ddot{\theta}$, obtenemos:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2)$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) - K_3\theta_2$$

Cambiando el orden, las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (K_1 + K_2)\theta_1 - K_2\theta_2 = 0$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + (K_2 + K_3)\theta_2 - K_2\theta_1 = 0$$

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sea uno de estos componentes:

$$\theta_1 = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$
$$\theta_2 = B\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \phi)$$

donde A, B y ϕ son constantes arbitrarias y ω es una de las frecuencias naturales del sistema. Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(K_1 + K_2 - J_1\omega^2)A - K_2B = 0$$
$$-K_2A + (K_2 + K_3 - J_2\omega^2)B = 0$$

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B. La solución $A = B = 0$ simplemente define la condición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (K_1 + K_2 - J_1\omega^2) & -K_2 \\ -K_2 & (K_2 + K_3 - J_2\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollemos el determinante para obtener:

$$\omega^4 - \left[\frac{K_1 + K_2}{J_1} + \frac{K_2 + K_3}{J_2}\right]\omega^2 + \frac{K_1K_2 + K_2K_3 + K_3K_1}{J_1J_2} = 0$$

que es la ecuación de frecuencia del sistema. Las dos frecuencias naturales del sistema se hallan resolviendo esta ecuación.

Por consiguiente el movimiento general del sistema se compone de dos movimientos armónicos de frecuencias ω_1 y ω_2, es decir,

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$
$$\theta_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

donde las A, las B y los ψ son constantes arbitrarias. Las razones de amplitud se determinan de las ecuaciones algebraicas, así:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{K_2}{K_1 + K_2 - J_1\omega_1^2} = \frac{K_2 + K_3 - J_2\omega_1^2}{K_2} = \frac{1}{\lambda_1}$$
$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{K_2}{K_1 + K_2 - J_1\omega_2^2} = \frac{K_2 + K_3 - J_2\omega_2^2}{K_2} = \frac{1}{\lambda_2}$$

Por tanto, el movimiento general toma finalmente la forma:

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$
$$\theta_2(t) = \lambda_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \lambda_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2)$$

donde las cuatro constantes A_1, A_2, ψ_1 y ψ_2 deben evaluarse de las cuatro condiciones iniciales: $\theta_1(0)$; $\dot{\theta}_1(0)$; $\theta_2(0)$ y $\dot{\theta}_2(0)$.

6. Si los momentos de inercia de las ruedas dentadas son despreciables y $J_1 = 2J_2$, $K_1 = K_2 = K$ y la razón de engrane es $n = 3$, determinar la frecuencia de la vibración torsional.

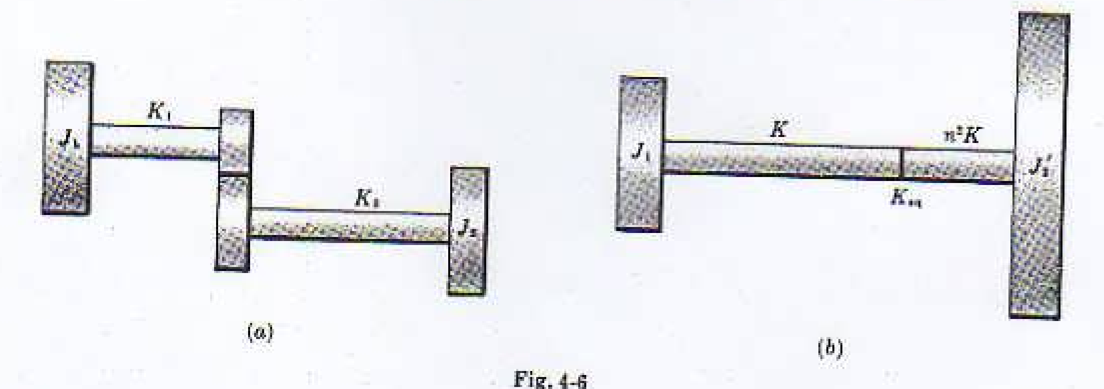


Fig. 4-6

Sean θ_1 y θ_2 los desplazamientos angulares de los rotores J_1 y J_2, respectivamente. Debido a la presencia de los engranajes, θ_2 es igual a $n\theta_1$.

La energía total del sistema consta de energía cinética y de energía potencial y permanece constante.

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \tfrac{1}{2}K_2\theta_2^2$$

o

$$\text{E.C.} = \tfrac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}J_2(n\dot{\theta}_1)^2$$
$$\text{E.P.} = \tfrac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \tfrac{1}{2}K_2(n\theta_1)^2$$

La energía total será la misma si el sistema engranado se remplaza por su sistema equivalente. Esto se hace remplazando J_2 de forma que $J_2' = n^2J_2$ y K_2 de forma que $K_2 = n^2K$. Por consiguiente el sistema equivalente es el que se muestra en la figura 4-6(b).

La frecuencia natural del sistema equivalente está dada por:

$$\omega_n = \sqrt{K_{eq}(J_1 + J_2')/J_1J_2'}$$

donde $J_2' = n^2J_2 = n^2J_1/2 = 4{,}5J_1$ y $K_{eq} = n^2K^2/(K + n^2K) = 0.9K$. Por tanto, $\omega_n = \sqrt{1.05K/J_1}$ rad/seg.

7. Un eje de sección uniforme y longitud $4L$ está soportado en tres puntos diferentes, como se muestra en la figura 4-7. Dos rotores de igual peso están fijos al eje a una distancia L de los correspondientes extremos. ¿Cuáles son las velocidades críticas del eje?

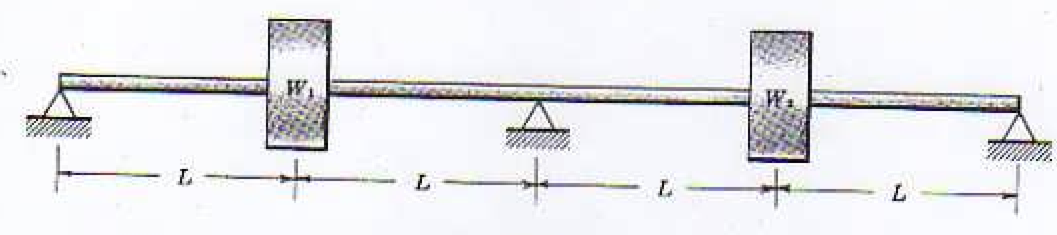


Fig. 4-7

Sean y_1 y y_2 las deflexiones de los rotores W_1 y W_2 respectivamente y α_{11}, α_{12}, α_{21} y α_{22} los coeficientes de influencia. Aplicando el principio de d'Alembert obtenemos:

$$y_1 = -\alpha_{11}(W_1/g)\ddot{y}_1 - \alpha_{12}(W_2/g)\ddot{y}_2$$
$$y_2 = -\alpha_{21}(W_1/g)\ddot{y}_1 - \alpha_{22}(W_2/g)\ddot{y}_2$$

Supongamos que el movimiento es periódico y sean

$$y_1 = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{y}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$
$$y_2 = B\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{y}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \phi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones, obtenemos:

$$(1 - \alpha_{11}W_1\omega^2/g)A - (W_2\alpha_{12}\omega^2/g)B = 0$$
$$-(W_1\alpha_{21}\omega^2/g)A + (1 - \alpha_{22}W_2\omega^2/g)B = 0$$

Estas son ecuaciones algebraicas linealmente homogéneas en A y B. La solución $A = B = 0$ simplemente define la posición de equilibrio del sistema. La otra solución se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A y B, es decir,

$$\begin{vmatrix} (1 - \alpha_{11}W_1\omega^2/g) & -(W_2\alpha_{12}\omega^2/g) \\ -(W_1\alpha_{21}\omega^2/g) & (1 - \alpha_{22}W_2\omega^2/g) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\frac{W_1W_2}{g}\omega^4 - (\alpha_{11}W_1/g + \alpha_{22}W_2/g)\omega^2 + 1 = 0$$

que es la ecuación de frecuencia del sistema.

Debido a la simetría del problema, $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ y $\alpha_{12} = \alpha_{21}$ y por la resistencia de materiales se puede demostrar que estos coeficientes de influencia tienen los siguientes valores:

$$\alpha_{11} = \frac{23L^3}{192EI} \qquad \text{y} \qquad \alpha_{12} = \frac{-9L^3}{192EI}$$

Remplazando estos valores en la ecuación de frecuencia y resolviendo, obtenemos:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6EIg}{WL^3}} \qquad \text{y} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{13{,}9EIg}{WL^3}} \text{ rad/seg}$$

Pero las frecuencias naturales del eje son también las velocidades críticas. Por tanto, las velocidades críticas del eje son:

$$f_1 = 0{,}4\sqrt{\frac{EIg}{WL^3}} \qquad \text{y} \qquad f_2 = 0{,}6\sqrt{\frac{EIg}{WL^3}} \text{ ciclos/seg}$$

8. Utilizar el método Holzer para determinar las frecuencias naturales de la vibración torsional del sistema que se muestra en la figura 4-8. $J_1 = J_2 = J_3 = 1$ y $K_1 = K_2 = 1$.

Como se explicó en el capítulo 3, el método Holzer se utiliza ventajosamente en forma tabular, de la manera siguiente:

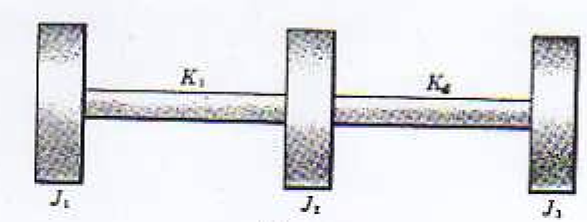
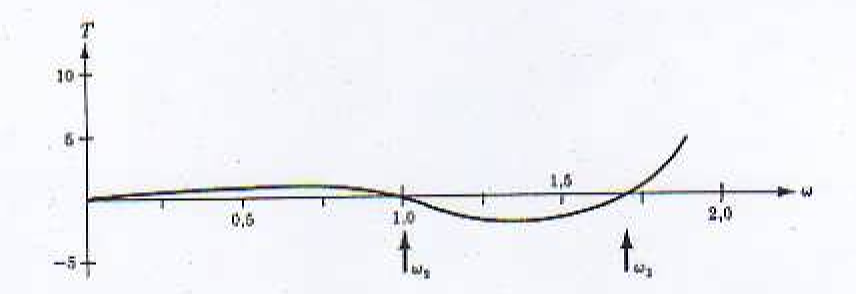


Fig. 4-8

Tabla

Item	J_i	$J_i\omega^2$	θ_i	$J_i\omega^2\theta_i$	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i$	K_{ij}	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i/K_{ij}$
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}5$							
1	1	0,25	1	0,25	0,25	1	0,25
2	1	0,25	0,75	0,19	0,44	1	0,44
3	1	0,25	0,31	0,07	0,51		
Frecuencia supuesta: $\omega = 0{,}75$							
1	1	0,56	1	0,56	0,56	1	0,56
2	1	0,56	0,44	0,24	0,80	1	0,80
3	1	0,56	−0,36	0,20	0,60		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1{,}0$							
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	0	0	1	1	1
3	1	1	−1	−1	0		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1{,}5$							
1	1	2,25	1,0	2,25	2,25	1	2,25
2	1	2,25	−1,25	−2,82	−0,57	1	−0,57
3	1	2,25	−0,68	−1,53	−2,1		
Frecuencia supuesta: $\omega = 1{,}79$							
1	1	3,21	1	3,21	3,21	1	3.21
2	1	3,21	−2,21	−7,08	−3,87	1	−3.87
3	1	3,21	1,66	5.43	1,56		

Graficando los valores de la frecuencia supuesta contra el momento torsional, obtenemos:



Por tanto, las frecuencias naturales son $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1{,}0$, $\omega_3 = 1{,}7$ rad/seg.

9. Emplear el método Holzer para determinar las frecuencias naturales de la vibración torsional del sistema de cuatro grados de libertad que se muestra en la figura 4-9.

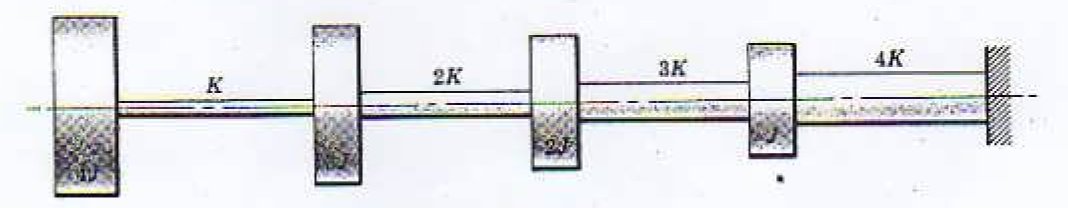


Fig. 4-9

Como se explicó en el problema 29 del capítulo 3, el método Holzer se utiliza ventajosamente en forma tabular, de la manera siguiente:

Tabla

Item	J_i	$J_i\omega^2$	θ_i	$J_i\omega^2\theta_i$	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i$	K_{ij}	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i/K_{ij}$
Frecuencia supuesta: ω = 0,2							
1	4	0,16	1,0	0,16	0,16	1	0,16
2	3	0,12	0,84	0,101	0,26	2	0,13
3	2	0,08	0,71	0,056	0,317	3	0,105
4	1	0,04	0,59	0,024	0,342	4	0,086
5	∞	∞	0,50				
Frecuencia supuesta: ω = 0,3							
1	4	0,36	1,0	0,36	0,36	1	0,36
2	3	0,27	0,64	0,173	0,533	2	0,267
3	2	0,18	0,373	0,067	0,600	3	0,200
4	1	0,09	0,173	0,016	0,616	4	0,154
5	∞	∞	0,019				
Frecuencia supuesta: ω = 0,4							
1	4	0,64	1,0	0,64	0,64	1	0,64
2	3	0,48	0,36	0,173	0,813	2	0,406
3	2	0,32	−0,046	−0,015	0,798	3	0,266
4	1	0,16	−0,312	−0,050	0,748	4	0,187
5	∞	∞	−0,499				
Frecuencia supuesta: ω = 0,6							
1	4	1,44	1,0	1,44	1,44	1	1,44
2	3	1,08	−0,44	−0,475	0,965	2	0,482
3	2	0,72	−0,922	−0,664	0,301	3	0,100
4	1	0,36	−1,023	−0,368	−0,067	4	−0,017
5	∞	∞	−1,006				
Frecuencia supuesta: ω = 0,8							
1	4	2,56	1,0	2,56	2,56	1	2,56
2	3	1,92	−1,56	−3,0	−0,44	2	−0,22
3	2	1,28	−1,34	−1,72	−2,16	3	−0,73
4	1	0,64	−0,61	−0,39	−2,55	4	−0,64
5	∞	∞	0,03				
Frecuencia supuesta: ω = 1,0							
1	4	4	1,0	4	4	1	4
2	3	3	−3,0	−9,0	−5,0	2	−2,5
3	2	2	−0,5	−1,0	−6,0	3	−2,0
4	1	1	1,5	1,5	−4,5	4	−1,13
5	∞	∞	2,63				
Frecuencia supuesta: ω = 1,5							
1	4	9	1,0	9	9	1	9
2	3	6,75	−8,0	−54	−45	2	−22,5
3	2	4,50	14,5	65,3	20,3	3	6,77
4	1	2,25	7,73	17,4	37,7	4	9,43
5	∞	∞	−1,70				
Frecuencia supuesta: ω = 1,8							
1	4	12,96	1 0	12,96	12,96	1	12,96
2	3	9,72	−11,96	−116,4	−103,44	2	−51,72
3	2	6,48	39,76	257,7	154,26	3	51,42
4	1	3,24	−11,66	−37,8	116,46	4	29,12
5	∞	∞	−40,78				

Tabla (cont.)

Item	J_i	$J_i\omega^2$	θ_i	$J_i\omega^2\theta_i$	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i$	K_{ij}	$\Sigma J_i\omega^2\theta_i/K_{ij}$
Frecuencia supuesta: $\omega = 2,0$							
1	4	16	1,0	16	16	1	16
2	3	12	−15	−180	−164	2	−82
3	2	8	67	536	372	3	124
4	1	4	−57	−228	144	4	36
5	∞	∞	−93				
Frecuencia supuesta: $\omega = 2,5$							
1	4	25	1,0	25	25	1	25
2	3	18,75	−24	−450	−425	2	−212,5
3	4	12,5	188,5	2360	1935	3	645
4	1	6,25	−456,5	−2860	−925	4	−231
5	∞	∞	−225,5				
Frecuencia supuesta: $\omega = 3,0$							
1	4	36	1,0	36	36	1	36
2	3	27	−35	−945	−909	2	−455
3	2	18	420	7560	6651	3	2220
4	1	9	−1800	−16.200	−9549	4	−2389
5	∞	∞	589				

Graficando los valores de la frecuencia supuesta contra las amplitudes θ_i (en la columna 4), como en el problema anterior, encontramos que las frecuencias naturales son:

$$\omega_1 = 0,3\sqrt{K/J}, \quad \omega_2 = 0,81\sqrt{K/J}, \quad \omega_3 = 1,45\sqrt{K/J}, \quad \omega_4 = 2,83\sqrt{K/J} \text{ rad/seg}$$

10. Tres rotores circulares están rígidamente unidos a un eje sólido de acero, como se muestra en la figura 4-10. Utilice el método Stodola para encontrar la frecuencia fundamental del sistema. $J_1 = 3$; $J_2 = 0,5$; $J_3 = 1,0$ pul-lb-seg^2/rad; $K_1 = 2(10)^6$; $K_2 = 3(10)^6$; $K_3 = 4(10)^6$ pul-lb/rad y la masa del eje es despreciable.

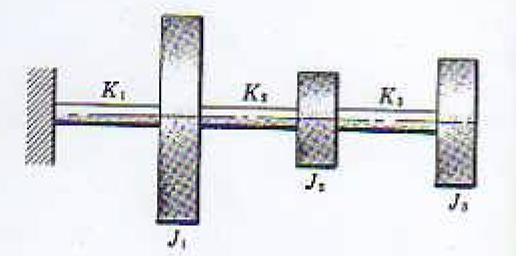


Fig. 4-10

Como se explicó en el problema 26 del capítulo 3, el método Stodola se utiliza ventajosamente en forma tabular, de la siguiente manera:

Tabla

	K_1	J_1	K_2	J_2	K_3	J_3	Factor
Deflexión supuesta		1		1,5		2	a
Momento tors. de inercia		3		0,75		2	$a\omega^2$
Momento tors. del eje	5,75		2,75		2		$a\omega^2$
Torsión del eje	2,88		0,92		0,5		$a\omega^2(10)^{-6}$
Deflexión calculada		2,88		3,8		4,3	$a\omega^2(10)^{-6}$
		1		1,32		1,49	a
Deflexión supuesta		1		1,3		1,5	a
Momento tors. de inercia		3		0,65		1,5	$a\omega^2$
Momento tors. del eje	5,15		2,15		1,5		$a\omega^2$
Torsión del eje	2,58		0,72		0,38		$a\omega^2(10)^{-6}$
Deflexión calculada		2,58		3,3		3,68	$a\omega^2(10)^{-6}$
		1		1,28		1,43	a

Tabla (cont.)

	K_1	J_1	K_2	J_2	K_3	J_3	Factor
Deflexión supuesta		1		1.28		1.43	a
Momento tors. de inercia		3		0,64		1,43	$a\omega^2$
Momento tors. del eje	5,07		2,07		1.43		$a\omega^2$
Torsión del eje	2,54		0,69		0,36		$a\omega^2(10)^{-6}$
Deflexión calculada		2.54		3,23		3,59	$a\omega^2(10)^{-6}$
		1		1.274		1,429	a

La configuración que resulta de la última iteración es bastante aproximada a la de los valores supuestos. Por tanto, se suspende la computación y se calcula la frecuencia natural fundamental.

$$(2{,}54+3{,}23+3{,}59)a\omega^2(10)^{-6} \;=\; (1+1{,}274+1{,}429)a \qquad \text{y} \qquad \omega_1 = 626 \text{ rad/seg}$$

11. Un momento torsional armónico T_0 sen ωt se aplica al primer rotor del eje de sección uniforme que se muestra en la figura 4-11. Encontrar la vibración del estado estacionario del sistema. $J_1 = 5$; $J_2 = 10$; $J_3 = 15$ pul-lb-seg²/rad; $K_1 = 10(10)^6$; $K_2 = 20(10)^6$ pul-lb/rad, $\omega = 1000$ rad/seg.

Las ecuaciones de movimiento son:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K_1(\theta_1-\theta_2) \;=\; T_0 \text{ sen } \omega t$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + K_2(\theta_2-\theta_3) + K_1(\theta_2-\theta_1) \;=\; 0$$
$$J_3\ddot{\theta}_3 + K_2(\theta_3-\theta_2) \;=\; 0$$

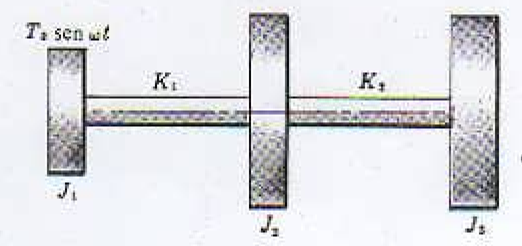


Fig. 4-11

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$\theta_1 = A \text{ sen } \omega t, \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A \text{ sen } \omega t$$
$$\theta_2 = B \text{ sen } \omega t, \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B \text{ sen } \omega t$$
$$\theta_3 = C \text{ sen } \omega t, \qquad \ddot{\theta}_3 = -\omega^2 C \text{ sen } \omega t$$

Remplazando estas expresiones en las ecuaciones de movimiento y simplificando, obtenemos:

$$(K_1 - J_1\omega^2)A - K_1 B \;=\; T_0$$
$$-K_1 A + (K_1+K_2-J_2\omega^2)B - K_2 C \;=\; 0$$
$$-K_2 B + (K_2 - J_3\omega^2)C \;=\; 0$$

Resolviendo por la regla de Cramer encontramos los valores de los coeficientes A, B y C

$$A = 1{,}5(10)^{-7}T_0, \qquad B = -0{,}25(10)^{-7}T_0, \qquad C = -(10)^{-7}T_0$$

y en consecuencia la vibración del estado estacionario es

$$\theta_1(t) \;=\; 1{,}5(10)^{-7}T_0 \text{ sen } \omega t$$
$$\theta_2(t) \;=\; -0{,}25(10)^{-7}T_0 \text{ sen } \omega t$$
$$\theta_3(t) \;=\; -(10)^{-7}T_0 \text{ sen } \omega t$$

12. Determinar la frecuencia natural más baja del sistema torsional bifurcado que se muestra en la figura 4-12. $J_1 = 10$; $J_2 = 15$; $J_3 = 20$; $J_4 = 10$; $J_5 = 10$; $J_6 = 20$ pul-lb-seg²/rad; $K_1 = 100$; $K_2 = 200$; $K_3 = 200$; $K_4 = 100$; $K_5 = 150$ pul-lb/rad.

Las frecuencias naturales se pueden hallar por el método de Holzer.

Supongamos un desplazamiento angular unitario para los discos colocados en los extremos de las ramificaciones. Continuando con el empalme, los desplazamientos angulares resultantes de las ramificaciones deben ser iguales. Si esto no ocurre debe hacerse el ajuste adecuado de los valores supuestos hasta que los desplazamientos angulares resultantes en el empalme sean iguales. La suma de los dos momentos torsionales de inercia de las ramificaciones es, entonces, igual al momento torsional que actúa sobre el eje principal.

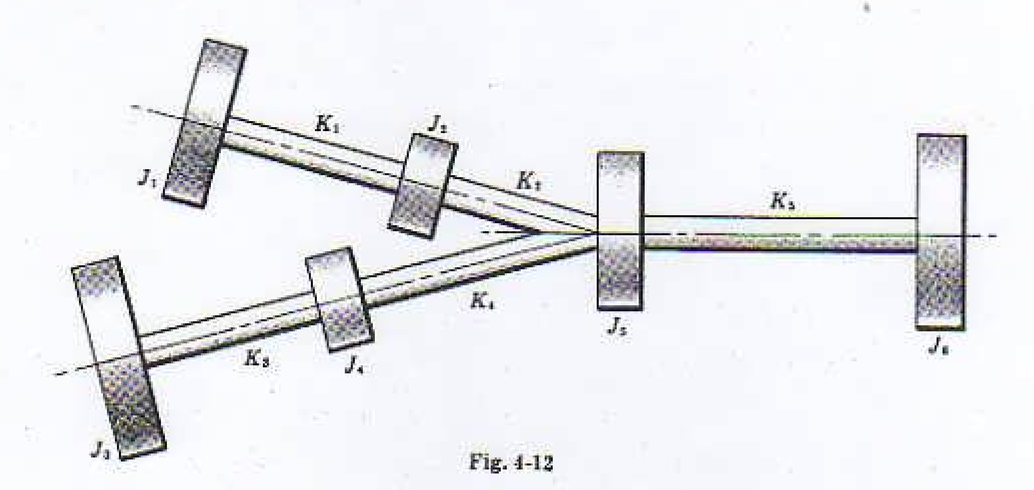


Fig. 4-12

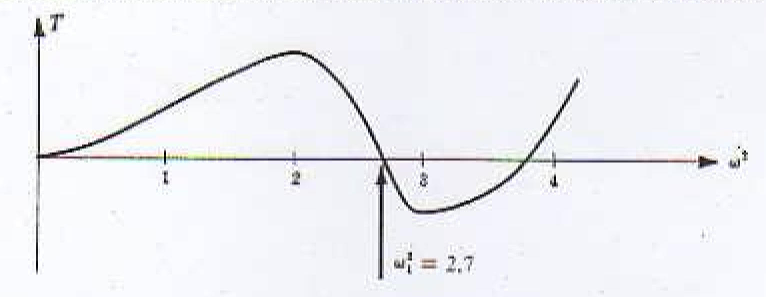
Tabla

Item	J_i	$J_i\omega^2$	θ_i	$J_i\omega^2\theta_i$	$\Sigma\ \omega^2 J_i \theta_i$	K_{ij}	$\Sigma\ J_i\omega^2\theta_i/K_{ij}$
Frecuencia supuesta: $\omega^2 = 1{,}0$							
1	10	10	1	10	10	100	0,1
2	15	15	0,9	13.5	23.5	200	0,12
5	10	10	0,78	7.8	31.3		
3	20	20	1	20	20	200	0,1
4	10	10	0,9	9	29	100	0,29
5	10	10	0,61	6,1	35,1		
En el empalme, el disco J_5 no puede tener amplitudes de 0.78 y 0,61 al mismo tiempo. Por tanto, hagamos (0.78/0.61) el nuevo valor supuesto para el disco J_3.							
3	20	20	1.28	25,6	25.6	200	0,13
4	10	10	1.15	11.5	37.1	100	0,37
5	10	10	0.78	7.8	68.4	150	0.456
El momento torsional que actúa sobre el eje K_5 se iguala a la suma de los momentos torsionales desarrollados para los discos J_1, J_2, J_3, J_4 y J_5, es decir, $23.5 + 37.1 + 7.8 = 68.4$.							
6	20	20	0,32	6.4	74,8		
Frecuencia supuesta: $\omega^2 = 2{,}0$							
1	10	20	1,0	20,0	20,0	100	0,2
2	15	30	0,8	24,0	44,0	200	0,22
5	10	20	0,58				
3	20	40	1,0	40,0	40,0	200	0,2
4	10	20	0,8	16,0	56,0	100	0,56
5	10	20	0,24				
En el empalme, el disco J_5 no puede tener amplitudes de 0,58 y 0,24 al mismo tiempo. Por consiguiente, hagamos (0.58/0,24) el nuevo valor supuesto para el disco J_3.							
3	20	40	2,42	96.8	96,8	200	0,48
4	10	20	1,94	38,8	135,6	100	1,356
5	10	20	0,58	11,6	191,2	150	1,28
El momento torsional que actúa en el eje K_5 se iguala a la suma de los momentos torsionales desarrollados para los discos J_1, J_2, J_3, J_4 y J_5, es decir, $44 + 135.6 + 11.6 = 191.2$.							
6	20	40	−0,7	−28	163,2		

Tabla (cont.)

Item	J_i	$J_i\omega^2$	θ_i	$J_i\omega^2\theta_i$	$\Sigma\,\omega^2 J_i\theta_i$	K_{ij}	$\Sigma\,J_i\omega^2\theta_i/K_{ij}$
Frecuencia supuesta: $\omega^2 = 3.0$							
1	10	30	1.0	30	30	100	0.3
2	15	45	0.7	31.5	61.5	200	0.31
5	10	30	0.39				
3	20	60	1.0	60	60	200	0.3
4	10	30	0.7	21	81	100	0.81
5	10	30	−0.11	−3.3	77.7		
Como el disco J_5 no puede tener amplitudes de 0.39 y −0.11 al mismo tiempo, hagamos (0.39/−0.11) el nuevo valor supuesto para el disco J_3.							
3	20	60	−3.55	−213	−213	200	−1.06
4	10	30	−2.49	−74.9	−287.9	100	−2.88
5	10	30	0.39	11.7	−214.7	150	−1.43
El momento torsional que actúa sobre el eje K_5 se iguala a la suma de los momentos torsionales desarrollados para los discos J_1, J_2, J_3, J_4 y J_5, es decir, 61.5 + (−287.9) + 11.7 = −214.7.							
6	20	60	1.82	109	−105.7		

Graficando los valores de la frecuencia supuesta contra los momentos torsionales, obtenemos:



y así, la frecuencia natural fundamental del sistema es $\omega_1^2 = 2.7$, o sea que $\omega_1 = 1.64$ rad/seg.

13. Tres rotores que pesan 1000 lb, 1500 lb y 2800 lb, respectivamente, están fijos a un eje de acero de 4 pul de diámetro, como se muestra en la figura 4-13. Las distancias entre ellos es de 26 pul. Si G para el acero vale $12(10)^6$ lb/pul², encontrar las frecuencias naturales de vibración.

Empleando la ecuación de momento torsional $\Sigma M = J\ddot{\theta}$, las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema son:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = 0$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_3) + K(\theta_2 - \theta_1) = 0$$
$$J_3\ddot{\theta}_3 + K(\theta_3 - \theta_2) = 0$$

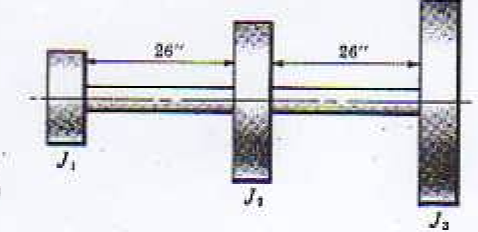


Fig. 4-13

Supongamos que el movimiento es periódico y se compone de movimientos armónicos de diferentes amplitudes y frecuencias. Sean

$$\theta_1 = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$
$$\theta_2 = B\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \phi)$$
$$\theta_3 = C\cos(\omega t + \phi), \qquad \ddot{\theta}_3 = -\omega^2 C\cos(\omega t + \phi)$$

Remplazando estos valores en las ecuaciones de movimiento, obtenemos:

$$(K - J_1\omega^2)A - KB = 0$$
$$-KA + (2K - J_2\omega^2)B - KC = 0$$
$$-KB + (K - J_3\omega^2)C = 0$$

La ecuación de frecuencia se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de A, B y C, es decir,

$$\begin{vmatrix} (K - J_1\omega^2) & -K & 0 \\ -K & (2K - J_2\omega^2) & -K \\ 0 & -K & (K - J_3\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y simplificando obtenemos:

$$\omega^2\{\omega^4 - [K/J_3 + 2K/J_2 + K/J_1]\omega^2 + K^2/J_1J_2 + K^2/J_2J_3 + K^2/J_3J_1\} = 0$$

donde $\omega_1^2 = 0$ corresponde al movimiento rígido del eje, sin ningún desplazamiento angular.

Haciendo $K = \pi d^4G/32L = 11{,}2(10)^6$, $J_1 = \frac{1}{2}Wr^2/g = 210$, $J_2 = 600$, y $J_3 = 1450$ en la ecuación de frecuencia, obtenemos:

$$\omega_3 = 67{,}2 \quad \text{y} \quad \omega_2 = 23{,}7 \text{ ciclos/seg}$$

Problemas propuestos

14. Los extremos de un eje que tiene un disco pesado con momento de inercia J, están apoyados, como se muestra en la figura 4-14. Encontrar la frecuencia natural de la vibración torsional del disco.

Resp. $\omega_n = \sqrt{\dfrac{\pi d^4 G(L_1 + L_2)}{32JL_1L_2}}$ rad/seg

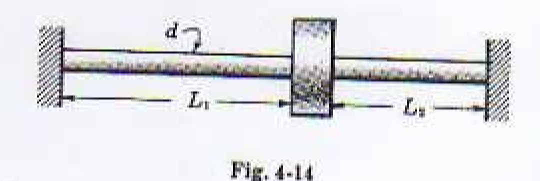


Fig. 4-14

15. Encontrar el eje equivalente del sistema que se muestra en la figura 4-15.
Resp. $d = d_1$, $L = L_1 + (d_1/d_2)^4(a_2/a_1)^2L_2$

16. Un momento torsional externo T_0 sen ωt actúa sobre el rotor J_1. Determinar las respuestas del estado estacionario del sistema que se muestra en la figura 4-16.

Resp. $\theta_1 = \dfrac{K_2T_0 \text{ sen } \omega t}{(K_1 + K_2 - J_1\omega^2)(K_2 - J_2\omega^2) - K_2^2}$, $\theta_2 = \dfrac{(K_1 + K_2 - J_1\omega^2)T_0 \text{ sen } \omega t}{(K_1 + K_2 - J_1\omega^2)(K_2 - J_2\omega^2) - K_2^2}$

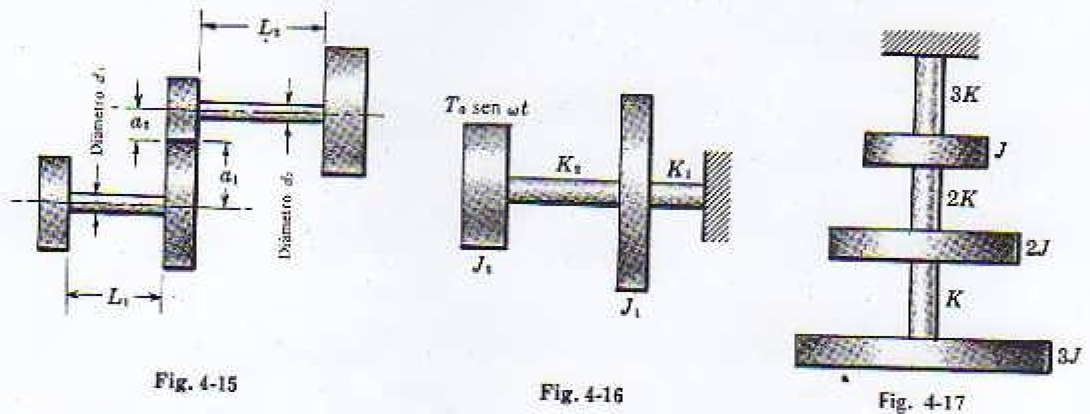
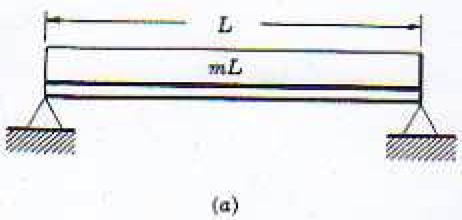


Fig. 4-15 Fig. 4-16 Fig. 4-17

17. Calcular las frecuencias naturales del sistema torsional que se muestra en la figura 4-17.
Resp. $\omega_1 = 0{,}39\sqrt{K/J}$, $\omega_2 = 1{,}47\sqrt{K/J}$, $\omega_3 = 2{,}36\sqrt{K/J}$ rad/seg



(a)

mL/3 mL/3 mL/3

$\frac{L}{4}$ $\frac{L}{4}$ $\frac{L}{4}$ $\frac{L}{4}$

(b)

Fig. 4-18

18. Una viga simplemente apoyada tiene una carga uniformemente repartida, como se muestra en la figura 4-18(a). Determinar la frecuencia natural fundamental por medio de la configuración que se muestra en la figura 4-18(b).

Resp. $f_1 = 1{,}36\sqrt{EI/mL^4}$ ciclos/seg

19. Calcular las frecuencias naturales del sistema torsional que se muestra en la figura 4-19. El eje lleva tres rotores y tiene ambos extremos fijos.

Resp. $\omega_1 = 0{,}54\sqrt{K/J}$, $\omega_2 = 1{,}17\sqrt{K/J}$,
$\omega_3 = 1{,}82\sqrt{K/J}$ rad/seg

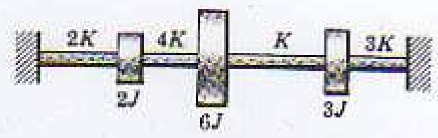


Fig. 4-19

20. Si $J = K = 1$, determinar el movimiento general del sistema que se muestra en la figura 4-20, si al primer disco se le aplica un desplazamiento angular inicial de 1 radián.

Resp.
$$\theta_1(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{6}(\cos\sqrt{3}\,t)$$
$$\theta_2(t) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}(\cos\sqrt{3}\,t)$$
$$\theta_3(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\cos t + \tfrac{1}{6}(\cos\sqrt{3}\,t)$$



Fig. 4-20

21. Utilizar el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 4-21. El sistema está fijo en ambos extremos y tiene una vibración torsional. $K = 1000$ pul-lb/rad y $J = 10$ pul-lb-seg^2/rad.

Resp. $\omega_1 = 7{,}66$, $\omega_2 = 14{,}12$, $\omega_3 = 18{,}57$ rad/seg



Fig. 4-21

22. Emplear el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 4-22. $K = 10(10)^6$ pul-lb/rad y $J = 10^3$ pul-lb-seg^2/rad. *Resp.* $\omega_1 = 46$, $\omega_2 = 100$, $\omega_3 = 134$ rad/seg

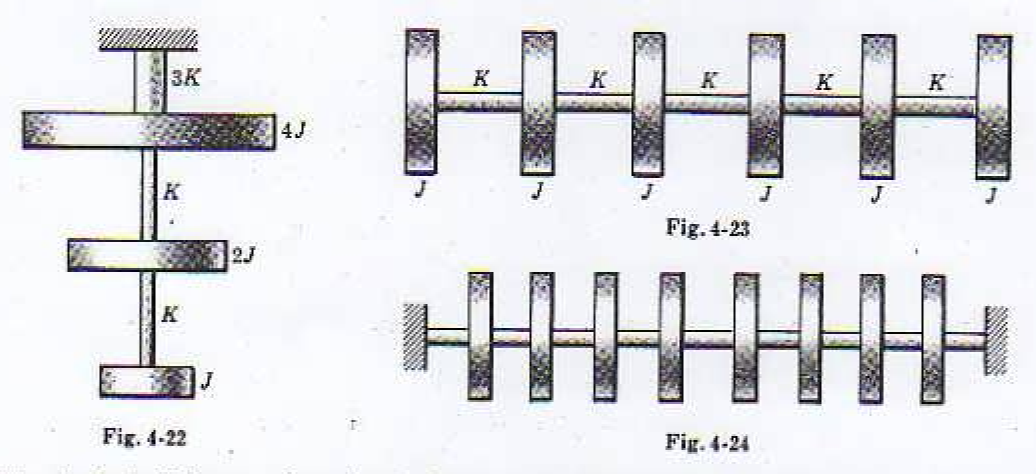


Fig. 4-22

Fig. 4-23

Fig. 4-24

23. Utilizar el método Holzer para determinar las frecuencias naturales del sistema que se muestra en la figura 4-23.

Resp. $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0{,}518\sqrt{K/J}$, $\omega_3 = \sqrt{K/J}$, $\omega_4 = 1{,}41\sqrt{K/J}$, $\omega_5 = 1{,}73\sqrt{K/J}$, $\omega_6 = 1{,}93\sqrt{K/J}$ rad/seg

24. En la figura 4-24 se muestra un eje de sección uniforme con ocho rotores iguales fijados a él, a distancias iguales. Utilizar el método Stodola para determinar la frecuencia natural más baja del sistema. Verificar la respuesta obtenida por medio del método Holzer.

Resp. $\omega_1 = 0{,}347\sqrt{K/J}$ rad/seg

Capítulo 5

Vibraciones en medios continuos

INTRODUCCION

Los sistemas mecánicos, tales como cables, varillas, vigas, placas, etc., que tienen sus masas y sus fuerzas elásticas *distribuidas*, en lugar de tener masas concentradas separadas por resortes, son susceptibles de tener las llamadas vibraciones de medios continuos.

Estos sistemas constan de un número infinito de partículas y por tanto requieren igual cantidad de coordenadas para especificar su configuración. En consecuencia, los sistemas mecánicos de esta clase tienen un *infinito número de frecuencias naturales y de modos naturales de vibración*.

En general, las vibraciones de medios continuos están gobernadas por ecuaciones diferenciales parciales y para sus análisis se supone que todos los materiales son homogéneos e isotrópicos y obedecen a la ley de Hooke.

VIBRACION LONGITUDINAL DE BARRAS

La ecuación diferencial de movimiento es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u = desplazamiento de una sección trasversal cualquiera,
a^2 = Eg/γ, E = módulo de elasticidad de la barra, γ = peso específico de la barra,
x = coordenada a lo largo del eje longitudinal.

La solución general está dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\dots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)\left(C_i \cos \frac{p_i x}{a} + D_i \operatorname{sen} \frac{p_i x}{a}\right)$$

donde A_i, B_i, C_i y D_i son constantes que deben determinarse de las condiciones iniciales y de contorno y p_i son las frecuencias naturales del sistema.

VIBRACION TRASVERSAL DE VIGAS

La ecuación diferencial de movimiento es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

donde y = deflexión de la viga.
x = coordenada a lo largo del eje longitudinal de la viga.
a^2 = $EIg/A\gamma$, A = área de la sección trasversal, γ = peso específico de la viga,

y EI se conoce como la rigidez a la flexión de la viga. La solución general está dada por la fórmula:

$$y(x,t) = (A \cos pt + B \operatorname{sen} pt)(C_1 \cos kx + C_2 \operatorname{sen} kx + C_3 \cosh kx + C_4 \operatorname{senh} kx)$$

donde p = frecuencia natural, $k^2 = p/a$.

y las constantes A y B son evaluadas de las condiciones iniciales y C_1, C_2, C_3 y C_4 de las cuatro condiciones de contorno del problema.

PRINCIPIO DE LA ORTOGONALIDAD

El principio de la ortogonalidad de las funciones normales para la vibración longitudinal de barras está dado por la fórmula:

$$\int_0^L X_i X_j\,dx \;=\; \frac{a^2}{p_j^2 - p_i^2}\left[X_j \frac{dX_i}{dx} - X_i \frac{dX_j}{dx}\right]_0^L$$

donde X_i y X_j son las funciones normales de vibración.

El principio de la ortogonalidad de las funciones normales para la vibración trasversal de vigas está dado por la fórmula:

$$\int_0^L X_i X_j\,dx \;=\; \frac{a^2}{p_j^2 - p_i^2}\left[X_i \frac{d^3X_j}{dx^3} - X_j \frac{d^3X_i}{dx^3} + \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_i}{dx^2} - \frac{dX_i}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2}\right]_0^L$$

donde X_i y X_j son las funciones normales.

VIBRACIONES TORSIONALES DE EJES DE SECCION CIRCULAR

La ecuación diferencial de movimiento es:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \;=\; a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

donde θ = torsión angular del eje,
x = coordenada a lo largo del eje longitudinal del eje,
$a^2 = Gg/\gamma$. G = módulo cortante de elasticidad, y
γ = peso por unidad de volumen del eje.

Como la ecuación de movimiento de vibraciones torsionales de ejes de sección circular es la misma de la de vibraciones longitudinales de barras, cualquier problema resuelto de vibraciones longitudinales puede aplicarse exactamente igual a los ejes sometidos a vibración torsional.

Problemas resueltos

VIBRACION LONGITUDINAL DE BARRAS

1. Deducir la ecuación diferencial de movimiento de la vibración longitudinal de una barra de sección uniforme, y analizar su solución general.



Fig. 5-1

Sea u el desplazamiento de una sección trasversal cualquiera de la barra, dx. Entonces la deformación ϵ_x en cualquier punto x es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \epsilon_x$$

Para una barra elástica el esfuerzo es $\sigma_x = E\epsilon_x$, donde E es el módulo de elasticidad. Luego la fuerza de tensión en x es:

$$S \;=\; \int_A \sigma_x\,dA \;=\; EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

y la fuerza de inercia es $\rho A\,dx\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, donde $\rho = \gamma/g$ es la densidad de la barra y A el área de la sección trasversal.

Igualando las dos fuerzas tenemos:

$$S + \frac{\partial S}{\partial x}dx \;=\; S + \frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde $a^2 = Eg/\gamma$. Esta es la ecuación diferencial de movimiento de la vibración longitudinal de barras de sección uniforme.

Para resolver esta ecuación diferencial supongamos que la solución es de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Remplazando esta expresión en la ecuación de movimiento obtenemos:

$$a^2 \frac{d^2X/dx^2}{X} = \frac{d^2T/dt^2}{T}$$

Puesto que el miembro de la izquierda es función únicamente de x y el miembro de la derecha es función únicamente de t, cada uno de estos miembros debe ser igual a una constante. Sea esta constante $-p^2$. De este modo obtenemos dos ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{T} + p^2T = 0 \qquad \text{y} \qquad d^2X/dx^2 + (p/a)^2X = 0$$

cuyas soluciones son bien conocidas:

$$T(t) = A\cos pt + B \operatorname{sen} pt$$
$$X(x) = C\cos(p/a)x + D\operatorname{sen}(p/a)x$$

Como $X(x)$ es una función de x, únicamente, y determina la forma del modo normal de vibración considerado, se le llama una *función normal*. Luego, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(C_i\cos\frac{p_ix}{a} + D_i\operatorname{sen}\frac{p_ix}{a}\right)$$

donde A_i, B_i, C_i y D_i son constantes arbitrarias determinadas de las condiciones iniciales y de contorno del problema y p_i las frecuencias naturales del sistema.

2. Una barra rectangular de longitud L y sección trasversal uniforme tiene vibraciones longitudinales. Deducir la ecuación de frecuencia, si los dos extremos de la barra están libres, como se muestra en la figura 5-2.



Fig. 5-2

La solución general de la vibración longitudinal de barras uniformes está dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(C_i\cos\frac{p_ix}{a} + D_i\operatorname{sen}\frac{p_ix}{a}\right)$$

donde $a = \sqrt{Eg/\gamma}$ y p_i = frecuencias naturales del sistema.

Las fuerzas que actúan en los extremos de la barra durante la vibración deben ser iguales a cero, o sea que las condiciones de contorno del problema son: $(\partial u/\partial x)_{x=0} = (\partial u/\partial x)_{x=L} = 0$. Remplazando estas condiciones de contorno en la solución general obtenemos:

$$(A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(-\frac{p_i}{a}C_i\operatorname{sen}\frac{p_ix}{a} + \frac{p_i}{a}D_i\cos\frac{p_ix}{a}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad D_i = 0$$

y

$$(A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(-\frac{p_i}{a}C_i\operatorname{sen}\frac{p_iL}{a}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{p_iL}{a}\right) = 0$$

Esta es la ecuación de frecuencia, de la cual pueden determinarse las frecuencias naturales de la viga que tiene vibración longitudinal libre.

3. Deducir una expresión para la vibración longitudinal libre de una barra de sección trasversal uniforme y longitud L que tiene un extremo fijo y el otro libre, como se muestra en la figura 5-3.



Fig. 5-3

La solución general de la vibración longitudinal libre de barras uniformes está dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(C_i\cos\frac{p_ix}{a} + D_i\operatorname{sen}\frac{p_ix}{a}\right)$$

La fuerza de tensión en el extremo libre de la barra es igual a cero, a la vez que el desplazamiento en el extremo fijo también es igual a cero, es decir que las condiciones de contorno del problema son: $(u)_{x=0} = 0, (\partial u/\partial x)_{x=L} = 0$. Remplazando estas condiciones de contorno en la solución general, obtenemos:

$$(A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)(C_i) = (u)_{x=0} = 0 \qquad \text{o} \qquad C_i = 0$$

y

$$(A_i\cos p_it + B_i\operatorname{sen} p_it)\left(\frac{p_iD_i}{a}\cos\frac{p_iL}{a}\right) = (u)_{x=L} = 0$$

o sea que $\cos \frac{p_i L}{a} = 0$, ya que D_i no puede ser igual a cero. En consecuencia $p_i = \frac{i\pi a}{2L}$, donde $i = 1, 3, 5, \ldots$ Entonces, la expresión general de la vibración longitudinal es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,3,5,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{2L}\left(A_i \cos \frac{i\pi a t}{2L} + B_i \operatorname{sen} \frac{i\pi a t}{2L}\right)$$

donde $a = \sqrt{Eg/\gamma}$.

4. Determinar las funciones normales de la vibración longitudinal libre de una barra de longitud L y sección trasversal uniforme. Los dos extremos de la barra están fijos.



Fig. 5-4

Para la vibración longitudinal de barras uniformes, la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)\left[C_i \cos \frac{p_i}{a} x + D_i \operatorname{sen} \frac{p_i}{a} x\right]$$

Los desplazamientos de la barra en sus extremos son iguales a cero, o sea que las condiciones de contorno son $(u)_{x=0} = (u)_{x=L} = 0$. Remplazando estas condiciones de contorno en la solución general, tenemos:

$$(u)_{x=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} T_i [C_i \cos (p_i/a)x + D_i \operatorname{sen} (p_i/a)x] = 0 \qquad \text{o} \qquad C_i = 0$$

y

$$(u)_{x=L} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} T_i [D_i \operatorname{sen} (p_i/a)x] = 0$$

o sea que $\operatorname{sen}(p_i L/a) = 0$ y $p_i = i\pi a/L$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto la función normal es:

$$X_i(x) = D_i \operatorname{sen} i\pi x/L, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

5. Una barra uniforme de longitud L está inicialmente comprimida por dos fuerzas iguales aplicadas en sus extremos, como se muestra en la figura 5-5. Si estas fuerzas de compresión se quitan repentinamente, encontrar la vibración producida.

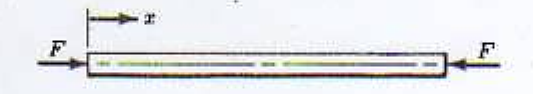


Fig. 5-5

ϵ expresa la compresión unitaria en un tiempo $t = 0$. Entonces las condiciones iniciales son:

$$(u)_{t=0} = \epsilon L/2 - \epsilon x, \qquad (\dot{u})_{t=0} = 0$$

Para la vibración longitudinal de barras uniformes la solución general es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)[C_i \cos (p_i/a)x + D_i \operatorname{sen} (p_i/a)x]$$

y como los dos extremos de la barra están libres, la solución se convierte en (véase el problema 2),

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{L}\left(A_i \cos \frac{i\pi a t}{L} + B_i \operatorname{sen} \frac{i\pi a t}{L}\right)$$

Remplazando las condiciones iniciales en la solución general, tenemos:

$$(u)_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \cos \frac{i\pi x}{L} = \frac{\epsilon L}{2} - \epsilon x, \qquad (\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} B_i \frac{i\pi a}{L} \cos \frac{i\pi x}{L} = 0$$

Por tanto, $B_i = 0$ y

$$\int_0^L A_i \cos \frac{i\pi x}{L} \cos \frac{i\pi x}{L}\, dx = \int_0^L \left(\frac{\epsilon L}{2} - \epsilon x\right) \cos \frac{i\pi x}{L}\, dx$$

o

$$A_i(L/2) = \int_0^L \left(\frac{\epsilon L}{2} - \epsilon x\right) \cos \frac{i\pi x}{L}\, dx$$

de donde

$$A_i = \int_0^L \epsilon \cos \frac{i\pi x}{L}\, dx - \frac{2\epsilon}{L}\int_0^L x \cos \frac{i\pi x}{L}\, dx = \frac{2L\epsilon}{i^2\pi^2}(1 - \cos i\pi)$$

Entonces, $A_i = 4\epsilon L/i^2\pi^2$ cuando i es impar y $A_i = 0$ cuando i es par. Por consiguiente la vibración producida está dada por:

$$u(x,t) = \frac{4\epsilon L}{\pi^2} \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(\cos i\pi x/L)(\cos i\pi a t/L)}{i^2}$$

6. Una barra uniforme de longitud L está inicialmente alargada por la acción de una fuerza axial P_0 aplicada en su extremo libre, como se muestra en la figura 5-6. Si esta fuerza se quita repentinamente en un tiempo $t = 0$, encontrar la vibración longitudinal resultante de la barra.

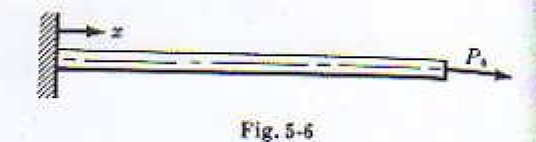


Fig. 5-6

ϵ expresa la elongación unitaria en el tiempo $t = 0$. Luego las condiciones iniciales son:

$$(u)_{t=0} = \epsilon x, \qquad (\dot{u})_{t=0} = 0$$

Como se explicó en el problema 3, la solución general para barras uniformes con un extremo fijo y un extremo libre es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\left(A_i \cos\frac{i\pi a t}{2L} + B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi a t}{2L}\right)$$

Remplazando las condiciones iniciales en la solución general tenemos:

$$(u)_{t=0} = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L} = \epsilon x, \qquad (\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{i\pi a}{2L} B_i \cos\frac{i\pi a t}{2L} = 0$$

Por tanto $B_i = 0$ y

$$\int_0^L A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx = \int_0^L \epsilon x \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx$$

de donde

$$A_i = \frac{2\epsilon}{L}\int_0^L x \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx = \frac{8\epsilon L}{i^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\Big]_0^L = \frac{8\epsilon L}{i^2\pi^2}(-1)^{(i-1)/2}$$

donde $i = 1, 3, 5, \ldots$ De este modo, la vibración longitudinal de la barra es:

$$u(x,t) = \frac{8\epsilon L}{\pi^2}\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)/2}}{i^2}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\cos\frac{i\pi a t}{2L}$$

7. Una barra de sección uniforme y longitud L está empotrada en los dos extremos, como se muestra en la figura 5-7. La barra adquiere un movimiento longitudinal producido por una velocidad constante V_0, aplicada en todos los puntos de la barra, en la dirección x. Encontrar la vibración longitudinal resultante.



Fig. 5-7

La solución general de la vibración longitudinal de barras uniformes con ambos extremos fijos es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\left(A_i \cos\frac{i\pi a}{L}t + B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi a}{L}t\right)$$

Las condiciones iniciales de este problema son: $(u)_{t=0} = 0$, $(\dot{u})_{t=0} = V_0$. Entonces,

$$u(x,0) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} = 0 \qquad \text{o} \qquad A_i = 0$$

$$\dot{u}(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} B_i \frac{i\pi a}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\cos\frac{i\pi a}{L}t$$

y

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} B_i \frac{i\pi a}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} = V_0$$

de donde

$$\frac{i\pi a}{L}\int_0^L B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx = \int_0^L V_0 \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx$$

o

$$B_i = \frac{2}{i\pi a}\int_0^L V_0 \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\,dx = \frac{2V_0 L}{i^2\pi^2 a}(1 - \cos i\pi)$$

Entonces, $B_i = \dfrac{4V_0 L}{i^2\pi^2 a}$ cuando i es impar y $B_i = 0$ cuando i es par. Por tanto, el movimiento resultante es:

$$u(x,t) = \frac{4V_0 L}{\pi^2 a}\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi a t}{L}$$

8. Una barra de longitud L está fija en un extremo y tiene el otro extremo unido a un resorte de constante k, como se muestra en la figura 5-8. Deducir la ecuación de frecuencia del sistema.



Fig. 5-8

La expresión general de la vibración longitudinal de barras uniformes que tienen un extremo empotrado y uno libre, es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\left[\frac{p_i x}{a}\right](A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)$$

donde u es el desplazamiento de una sección trasversal cualquiera de la barra en la dirección x.

Las condiciones de contorno son: $(u)_{x=0} = 0$, $-k(u)_{x=L} = AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L}$. De la segunda condición de contorno tenemos:

$$-k \operatorname{sen}\left(\frac{p_i L}{a}\right) = \frac{AEp_i}{a}\cos\left(\frac{p_i L}{a}\right) \qquad \text{o} \qquad \tan\left(\frac{p_i L}{a}\right) = -\frac{AEp_i}{ka}$$

Esta es la ecuación de frecuencia del sistema y si la constante de elasticidad del resorte, k, es muy pequeña comparada con la de la barra, $\tan(p_i L/a) \to \infty$, es decir que

$$p_i L/a = i\pi/2, \quad i = 1, 3, 5, \ldots$$

y $p = i\pi a/2L$ es la función normal de la vibración longitudinal de barras uniformes que tienen un extremo fijo y uno libre.

9. Deducir la ecuación diferencial de movimiento de la vibración longitudinal de barras uniformes que tienen un amortiguamiento interno dado por la expresión $\sigma_x = E\epsilon_x + c\dot{\epsilon}_x$, donde c es el coeficiente de amortiguamiento interno. Resolver la ecuación resultante.

Observamos que para barras uniformes sin amortiguamiento, el esfuerzo es $\sigma_x = E\epsilon_x$ y además $E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Por consiguiente para el caso con amortiguamiento interno la ecuación de movimiento es:

$$\left(E + c\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{c}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial t\,\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Lo mismo que para el caso sin amortiguamiento, hagamos $u_i = X_i T_i$ y $E/\rho = a^2$. Entonces,

$$a^2 X_i'' T_i + \frac{c}{\rho}X_i''\dot{T}_i = X_i \ddot{T}_i \qquad \text{donde} \quad X'' = d^2X/dx^2, \quad \ddot{T} = d^2T/dt^2$$

Cambiando el orden tenemos

$$X_i''\left(a^2 T_i + \frac{c}{\rho}\dot{T}_i\right) = X_i \ddot{T}_i \qquad \text{o} \qquad \frac{X_i''}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{a^2 T_i + (c/\rho)\dot{T}_i}$$

Puesto que el miembro de la izquierda es función únicamente de x y el miembro de la derecha función de t, únicamente, cada uno de estos miembros debe ser igual a una constante. De esta manera obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias, con $-(p_i^2/a_i^2)$ como constante de la ecuación anterior:

$$(1) \quad X_i'' + \frac{p_i^2}{a^2}X_i = 0 \qquad\qquad (2) \quad \ddot{T}_i + \frac{c}{\rho}\frac{p_i^2}{a^2}\dot{T}_i + p_i^2 T_i = 0$$

De la ecuación (1) tenemos:

$$X_i = C_i \cos(p_i/a)x + D_i \operatorname{sen}(p_i/a)x$$

y de la ecuación (2), haciendo $\alpha_i = cp_i^2/2E$, obtenemos:

$$\ddot{T}_i + 2\alpha_i \dot{T}_i + p_i^2 T_i = 0$$

cuya solución puede expresarse en la forma

$$T_i = A_i e^{\lambda_1 t} + B_i e^{\lambda_2 t}$$

donde $\lambda = -\alpha_i \pm \sqrt{\alpha_i^2 - p_i^2}$. La solución se puede reducir a

$$T_i = e^{-\alpha_i t}(A_i \cos\beta_i t + B_i \operatorname{sen}\beta_i t)$$

donde $\beta_i = \sqrt{p_i^2 - \alpha_i^2}$. Por tanto, la expresión general de la vibración longitudinal de barras uniformes con amortiguamiento interno es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} e^{-\alpha_i t}(A_i \cos\beta_i t + B_i \operatorname{sen}\beta_i t)\left(C_i \cos\frac{p_i x}{a} + D_i \operatorname{sen}\frac{p_i x}{a}\right)$$

10. Una barra de longitud L está empotrada en un extremo y tiene una masa concentrada unida al otro extremo, como se muestra en la figura 5-9. Deducir la ecuación de frecuencia.

Fig. 5-9

La expresión general de la vibración longitudinal de barras uniformes es:

$$u(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)\left(C_i \cos\frac{p_i x}{a} + D_i \operatorname{sen}\frac{p_i x}{a}\right)$$

En el extremo fijo no hay desplazamiento y la fuerza de inercia en el extremo libre de la barra es igual a la fuerza de inercia de la masa concentrada, o sea que las condiciones de contorno son:

$$(u)_{x=0} = 0, \qquad AE\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=L} = -\frac{W}{g}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{x=L}$$

donde A es el área de la sección trasversal de la barra.

De la primera condición de contorno tenemos:

$$u(0,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} T_i C_i = 0 \qquad \text{o} \qquad C_i = 0$$

donde $T_i = (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)$. De la segunda ecuación de contorno,

$$\frac{AEp_i}{a}\cos\frac{p_i L}{a} = \frac{W}{g}p_i^2 \operatorname{sen}\frac{p_i L}{a} \qquad \text{o} \qquad \frac{AL\gamma}{W} = \frac{p_i L}{a}\tan\frac{p_i L}{a}$$

donde γ es el peso por unidad de volumen de la barra y $a^2 = Eg/\gamma$. Esta es, entonces, la ecuación de frecuencia del sistema.

Cuando $AL\gamma/W \to \infty$, es decir, cuando la masa del peso unido al extremo de la barra es muy pequeña comparada con la masa de la barra, la ecuación de frecuencia se convierte en $\cos p_i L/a = 0$ y el sistema se trasforma en el de una barra con un extremo fijo y el otro libre.

Si W es grande comparado con el peso de la barra, se puede demostrar que $p_1 = \sqrt{AEg/WL}$. Esto corresponde a la frecuencia natural de un sistema masa-resorte de un solo grado de libertad, en el cual $m = W/g$ y $k = AE/L$.

11. Deducir el principio de la ortogonalidad de las funciones normales de la vibración longitudinal de barras uniformes.

Sean X_i y X_j dos funciones normales correspondientes a los modos normales de vibración de barras uniformes. La ecuación diferencial general de movimiento es:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde una solución es $u_i = X_i T_i$, y la otra $u_j = X_j T_j$. Como se explicó anteriormente, estas soluciones conducen a las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$a^2 X_i'' + p_i^2 X_i = 0, \qquad a^2 X_j'' + p_j^2 X_j = 0$$

donde $X'' = d^2X/dx^2$. Multiplicando la primera de estas ecuaciones por X_j y la segunda por X_i, restando la una de la otra e integrando tenemos:

$$a^2 X_i'' X_j + p_i^2 X_i X_j = 0, \qquad a^2 X_j'' X_i + p_j^2 X_j X_i = 0$$

y

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = -\frac{a^2}{p_i^2 - p_j^2}\int_0^L (X_i'' X_j - X_i X_j'')\,dx$$

o

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = -\frac{a^2}{p_i^2 - p_j^2}\Big[X_i' X_j - X_i X_j'\Big]_0^L$$

(1) Para barras que tienen ambos extremos libres las condiciones de contorno son:

$$(\partial u/\partial x)_{x=0} = (\partial u/\partial x)_{x=L} = 0 \qquad \text{o} \qquad (X')_{x=0} = (X')_{x=L} = 0$$

Por consiguiente,

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = 0, \qquad i \neq j$$

(2) Para barras que tienen un extremo fijo y uno libre, las condiciones de contorno son:

$$(u)_{x=0} = (\partial u/\partial x)_{x=L} = 0 \qquad \text{o} \qquad (X)_{x=0} = (X')_{x=L} = 0$$

Por consiguiente,

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = 0, \qquad i \neq j$$

(3) Para barras que tienen ambos extremos empotrados, las condiciones de contorno son:

$$(u)_{x=0} = (u)_{x=L} = 0 \qquad \text{o} \qquad (X)_{x=0} = (X)_{x=L} = 0$$

Por consiguiente,

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = 0, \qquad i \neq j$$

Como $\int_0^L X_i X_j\,dx = 0$ es cierta en los casos anteriores, entonces, en general, es cierta para la vibración longitudinal de barras uniformes. Este es, pues, el principio de la ortogonalidad de las funciones normales.

12. Una barra de sección uniforme y longitud L está empotrada en uno de sus extremos y el extremo libre es halado hasta que la barra tiene una longitud L_0. Si el extremo libre se suelta en un tiempo $t = 0$, encontrar la vibración longitudinal resultante.

Fig. 5-10

La solución general para barras con un extremo fijo y el otro libre está dada por la fórmula:



$$u(x,t) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\left(A_i \cos\frac{i\pi a t}{2L} + B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi a t}{2L}\right)$$

donde $a^2 = Eg/\gamma$ y A_i, B_i son constantes determinadas de las condiciones iniciales del problema:

$$(1)\quad u(x,0) = \frac{L_0 - L}{L}x \qquad\qquad (2)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Utilizando la condición inicial (2) tenemos:

$$(\dot{u})_{t=0} = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{i\pi a}{2L} B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L} = 0 \qquad \text{o} \qquad B_i = 0$$



De la condición inicial (1),

$$u(x,0) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L} = \frac{L_0 - L}{L}x$$

Multiplicando los dos miembros de la ecuación anterior por sen $i\pi x/2L$, obtenemos:

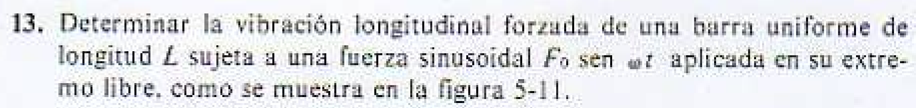
$$\int_0^L A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx = \frac{L_0 - L}{L}\int_0^L x \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx$$

o

$$A_i = \frac{2(L_0 - L)}{L^2}\int_0^L x \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\,dx = \frac{8(L_0 - L)}{i^2\pi^2}(-1)^{(i-1)/2}$$

donde $i = 1, 3, 5, \ldots$ Por tanto, la vibración longitudinal de la barra es:

$$u(x,t) = \frac{8(L_0 - L)}{\pi^2}\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{(i-1)/2}\frac{1}{i^2}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\cos\frac{i\pi a t}{2L}$$



13. Determinar la vibración longitudinal forzada de una barra uniforme de longitud L sujeta a una fuerza sinusoidal F_0 sen ωt aplicada en su extremo libre, como se muestra en la figura 5-11.

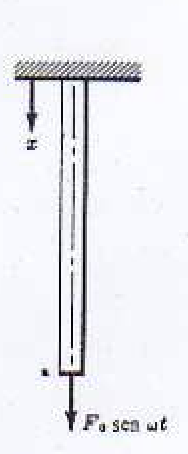


Fig. 5-11

La ecuación de movimiento de la vibración longitudinal de barras uniformes es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u es el desplazamiento de una sección trasversal cualquiera de la barra y $a^2 = E/\rho$.

Sea $u(x,t) = X(x)$ sen ωt la forma general de la solución para el estado estacionario de la vibración forzada de la barra. Remplazando esta expresión en la ecuación de movimiento, obtenemos:

$$\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2 X}{a^2} = 0$$

La solución de X puede escribirse como:

$$X(x) = A_1 \cos\frac{\omega}{a}x + A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x$$

y por tanto,
$$u(x,t) = \left(A_1 \cos\frac{\omega}{a}x + A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x\right) \operatorname{sen}\omega t$$

Las condiciones de contorno de este problema son:

en $x = 0$, $\quad (u) = 0$ y por tanto $A_1 = 0$

en $x = L$, $\quad AE\frac{\partial u}{\partial x} = F_0 \operatorname{sen}\omega t$

o sea, $\quad \frac{AE\omega A_2}{a}\cos\frac{\omega L}{a}\operatorname{sen}\omega t = F_0 \operatorname{sen}\omega t \quad$ que nos da $\quad A_2 = \frac{F_0 a}{AE\omega}\sec\frac{\omega L}{a}$

Luego la vibración forzada de la barra es:

$$u(x,t) = \frac{F_0 a}{AE\omega}\sec\frac{\omega L}{a}\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x \operatorname{sen}\omega t$$

14. Una barra uniforme de longitud L tiene un extremo libre y el otro es forzado a seguir un movimiento sinusoidal F_0 sen ωt, como se muestra en la figura 5-12. Encontrar la vibración del estado estacionario.

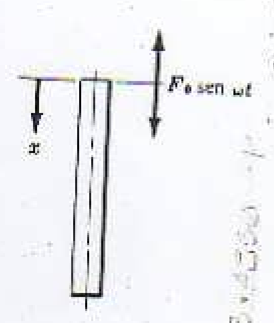


Fig. 5-12

La ecuación diferencial general de movimiento de la vibración longitudinal de barras uniformes es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde u es el desplazamiento de una sección trasversal cualquiera de la barra.

Las condiciones de contorno de este problema son:

$$(u)_{x=0} = F_0 \operatorname{sen}\omega t, \qquad (\partial u/\partial x)_{x=L} = 0$$

Como estamos interesados en la vibración del estado estacionario, hagamos $u(x,t) = X(x)\operatorname{sen}\omega t$ la forma general de solución. Remplazando u por esta expresión en la ecuación diferencial parcial de movimiento, obtenemos:

$$-X(x)\omega^2 \operatorname{sen}\omega t = a^2 \operatorname{sen}\omega t\frac{d^2X}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2 X}{a^2} = 0$$

La solución puede escribirse:

$$X(x) = A_1\cos\frac{\omega x}{a} + A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega x}{a}$$

y por tanto,
$$u(x,t) = \left(A_1\cos\frac{\omega x}{a} + A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega x}{a}\right)\operatorname{sen}\omega t$$

De la primera condición de contorno tenemos,

$$u(0,t) = A_1 \operatorname{sen}\omega t = F_0 \operatorname{sen}\omega t \quad \text{y así,} \quad A_1 = F_0$$

y de la segunda ecuación de contorno,

$$(\partial u/\partial x)_{x=L} = \frac{\omega}{a}\left[-F_0 \operatorname{sen}\frac{\omega L}{a} + A_2\cos\frac{\omega L}{a}\right]\operatorname{sen}\omega t = 0 \qquad \text{o} \qquad A_2 = F_0\tan\frac{\omega L}{a}$$

Por consiguiente la vibración del estado estacionario está dada por la fórmula:

$$u(x,t) = F_0\left[\cos\frac{\omega x}{a} + \tan\frac{\omega L}{a}\operatorname{sen}\frac{\omega x}{a}\right]\operatorname{sen}\omega t$$

Es claro que la resonancia ocurrirá si la frecuencia de la fuerza, ω, es igual a $\pi a/2L$, $3\pi a/2L$, $5\pi a/2L$, ... En estos casos la amplitud de la vibración del estado estacionario $u(x,t)$ se aproximará, teóricamente, a infinito.

VIBRACIONES TRASVERSALES DE BARRAS

15. Deducir la ecuación diferencial de movimiento de la vibración trasversal de las vigas.

La ecuación diferencial de movimiento puede deducirse de la curva de deflexión de vigas tratada en la resistencia de materiales:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M \qquad (1)$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

donde EI se conoce como la rigidez a la flexión de la viga, M es el momento de flexión en una sección trasversal cualquiera y y es la deflexión de la viga. Suponiendo que EI es constante y derivando la ecuación (1) dos veces, obtenemos:

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -Q \tag{2}$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w \tag{3}$$

donde Q es la fuerza cortante y w la intensidad de carga.

En las vibraciones trasversales libres de vigas que no tienen carga externa, es necesario considerar las fuerzas de inercia $-(\gamma A/g)\,\partial^2 y/\partial t^2$, como la intensidad de carga a lo largo de toda la longitud de la viga. Así, la ecuación (3) queda:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

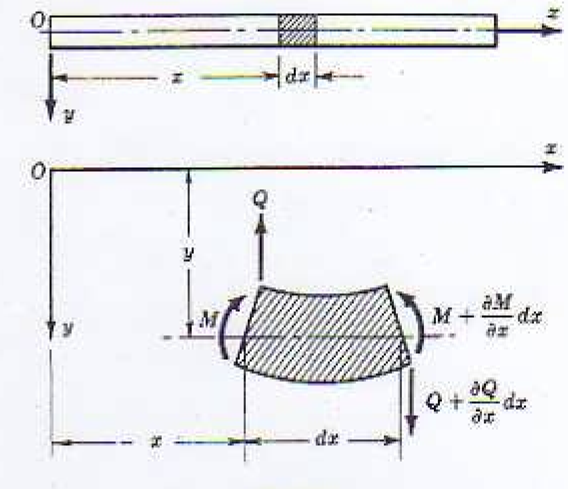


Fig. 5-13

en la cual se emplean derivadas parciales debido a que y es una función de x y de t. Como $a^2 = EIg/A\gamma$, (4) se convierte en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \tag{5}$$

Esta es, entonces, la ecuación diferencial de movimiento de la vibración trasversal de vigas de sección trasversal constante, donde se ha tenido en cuenta la rigidez y la inercia trasversal de la viga. Otros efectos, tales como el amortiguamiento externo, la elasticidad de los cimientos, las fuerzas axiales y la inercia rotacional pueden también ser incorporados, si así se desea.

16. Determinar los modos normales de la vibración trasversal de una viga simplemente apoyada de longitud L y sección trasversal uniforme que se muestra en la figura 5-14.

La ecuación diferencial de movimiento de la vibración trasversal de vigas de sección uniforme es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

Supongamos que $y = X(x)\cdot T(t)$. Remplazando esta expresión en la ecuación de movimiento, obtenemos:

$$X\ddot{T} + a^2 X^{\text{iv}}T = 0$$

donde $X^{\text{iv}} = d^4X/dx^4$. Esto también puede escribirse como:

$$X^{\text{iv}}/X = -\ddot{T}/a^2T$$

Como el miembro de la izquierda es función únicamente de x y el de la derecha es función únicamente de t, cada miembro debe ser igual a una constante. Sea esta constante p^2/a^2. De esta forma obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$X_1 = \text{sen}\,\pi x/L$

$X_2 = \text{sen}\,2\pi x/L$

$X_3 = \text{sen}\,3\pi x/L$

Fig. 5-14



(1) $X^{\text{iv}} - (p^2/a^2)X = 0$ (2) $\ddot{T} + p^2T = 0$

La solución de la ecuación (2) es bien conocida:

$$T(t) = A\cos pt + B\,\text{sen}\,pt$$

y la solución de la ecuación (1) es de la forma $X = e^{\lambda x}$, donde $\lambda = k, -k, ik, -ik$ y $k^4 = p^2/a^2$. La solución general puede escribirse en la forma

$$X(x) = C_1\cos kx + C_2\,\text{sen}\,kx + C_3\cosh kx + C_4\,\text{senh}\,kx$$

o $$C_1(\cos kx + \cosh kx) + C_2(\text{sen}\,kx + \text{senh}\,kx) + C_3(\cos kx - \cosh kx) + C_4(\text{sen}\,kx - \text{senh}\,kx)$$

En el caso de una viga simplemente apoyada, tanto el desplazamiento como el momento de flexión son iguales a cero en los extremos de la viga, o sea que las cuatro condiciones contorno son:

$$(X)_{x=0} = 0, \qquad (X)_{x=L} = 0, \qquad (d^2X/dx^2)_{x=0} = 0, \qquad (d^2X/dx^2)_{x=L} = 0$$

De estas cuatro condiciones de contorno se pueden evaluar las cuatro constantes desconocidas: C_1, C_2, C_3, y C_4 Utilizando la primera forma de la solución general, tenemos:

$$(X)_{x=0} = C_1 + C_3 = 0, \qquad (d^2X/dx^2)_{x=0} = -C_1 + C_3 = 0$$

y de estas dos ecuaciones, $C_1 = C_3 = 0$. Ahora,

$$(X)_{x=L} = C_2 \operatorname{sen} kL + C_4 \operatorname{senh} kL = 0$$

$$(d^2X/dx^2)_{x=L} = -k^2C_2 \operatorname{sen} kL + k^2C_4 \operatorname{senh} kL = 0$$

y por tanto $C_4 = 0$ y $\operatorname{sen} kL = 0$. Entonces,

$$\sqrt{p/a}\, L = i\pi \qquad \text{donde} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Las frecuencias naturales están dadas por la fórmula $p_i = i^2\pi^2 a/L^2$, y la función normal es $X_i = \operatorname{sen} i\pi x/L$. En la figura 5-14 se muestran los tres primeros modos normales de vibración.

17. Hallar las condiciones de contorno de los dos voladizos que se muestran en las figuras 5-15(*a*) y 5-15(*b*).

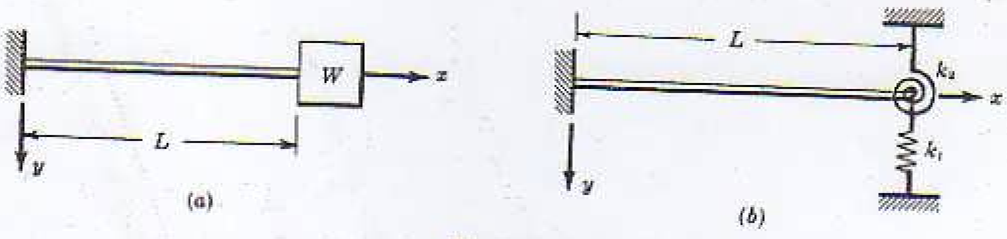


Fig. 5-15

(*a*) El desplazamiento y la inclinación son iguales a cero en el extremo empotrado, mientras que en el extremo libre la fuerza de inercia es igual a la fuerza de corte, es decir,

$$(y)_{x=0} = 0 \qquad (\partial y/\partial x)_{x=0} = 0$$

$$EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\bigg]_{x=L} = -\frac{W}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\bigg]_{x=L} \qquad EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg]_{x=L} = 0$$

si se desprecia la inercia rotatoria.

(*b*) Análogamente, el desplazamiento y la inclinación son iguales a cero en el extremo empotrado, mientras que la fuerza de corte y el momento de flexión están equilibrados por las fuerzas producidas por los resortes, es decir,

$$(y)_{x=0} = 0 \qquad (\partial y/\partial x)_{x=0} = 0$$

$$EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\bigg]_{x=L} = -k_2\frac{\partial y}{\partial x}\bigg]_{x=L} \qquad EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\bigg]_{x=L} = k_1(y)_{x=L}$$

18. Encontrar la ecuación de frecuencia de una viga con ambos extremos libres que tiene una vibración trasversal.

En este problema el momento de flexión y la fuerza de corte son iguales a cero en ambos extremos de la viga, es decir que,

$$(d^2X/dx^2)_{x=0} = 0, \qquad (d^3X/dx^3)_{x=0} = 0 \qquad (d^2X/dx^2)_{x=L} = 0, \qquad (d^3X/dx^3)_{x=L} = 0$$

En este caso es conveniente tomar la solución general de la función normal para la vibración trasversal de barras, en la siguiente forma:

$$X = C_1(\cos kx + \cosh kx) + C_2(\cos kx - \cosh kx) + C_3(\operatorname{sen} kx + \operatorname{senh} kx) + C_4(\operatorname{sen} kx - \operatorname{senh} kx)$$

De las dos primeras condiciones de contorno encontramos que $C_2 = C_4 = 0$ y por tanto:

$$X = C_1(\cos kx + \cosh kx) + C_3(\text{sen } kx + \text{senh } kx)$$

De las otras dos condiciones de contorno obtenemos:

$$(-\cos kL + \cosh kL)C_1 + (-\text{sen } kL + \text{senh } kL)C_3 = 0$$
$$(\text{sen } kL + \text{senh } kL)C_1 + (-\cos kL + \cosh kL)C_3 = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones para las constantes C_1 y C_3, obtenemos el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} (-\cos kL + \cosh kL) & (-\text{sen } kL + \text{senh } kL) \\ (\text{sen } kL + \text{senh } kL) & (-\cos kL + \cosh kL) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$(-\cos kL + \cosh kL)^2 - (\text{senh}^2 kL - \text{sen}^2 kL) = 0$$

o
$$-2\cos kL \cosh kL + \cos^2 kL + \cosh^2 kL - \text{senh}^2 kL + \text{sen}^2 kL = 0$$

Pero
$$\cosh^2 kL - \text{senh}^2 kL = 1, \quad \cos^2 kL + \text{sen}^2 kL = 1$$

y por tanto la ecuación de frecuencia es:

$$\cos kL \cosh kL = 1$$

19. Deducir la ecuación de frecuencia de una viga de longitud L que tiene un extremo empotrado y el otro simplemente apoyado, como se muestra en la figura 5-16.



Fig. 5-16

Las deflexiones en ambos extremos son iguales a cero, así como también la inclinación en $x = 0$ y el momento de flexión en $x = L$, es decir,

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (X)_{x=L} = 0 \quad (dX/dx)_{x=0} = 0, \quad (d^2X/dx^2)_{x=L} = 0$$

Tomemos la solución general de la función normal para la vibración trasversal de barras uniformes en la forma

$$X = C_1(\cos kx + \cosh kx) + C_2(\cos kx - \cosh kx) + C_3(\text{sen } kx + \text{senh } kx) + C_4(\text{sen } kx - \text{senh } kx)$$

De $(X)_{x=0} = 0$ encontramos que $C_1 = 0$ y de $(dX/dx)_{x=0} = 0$, $C_3 = 0$. Entonces,

$$X = C_2(\cos kx - \cosh kx) + C_4(\text{sen } kx - \text{senh } kx)$$

Remplazando las condiciones de contorno $(X)_{x=L} = 0$ y $(d^2X/dx^2)_{x=L} = 0$ en la expresión anterior, tenemos:

$$(\cos kL - \cosh kL)C_2 + (\text{sen } kL - \text{senh } kL)C_4 = 0$$
$$-(\cos kL + \cosh kL)C_2 - (\text{sen } kL + \text{senh } kL)C_4 = 0$$

La solución no trivial para C_2 y C_4 se encuentra igualando a cero el determinante de las ecuaciones anteriores, es decir,

$$\begin{vmatrix} (\cos kL - \cosh kL) & (\text{sen } kL - \text{senh } kL) \\ -(\cos kL + \cosh kL) & -(\text{sen } kL + \text{senh } kL) \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\text{sen } kL \cosh kL - \cos kL \text{ senh } kL = 0$$

luego la ecuación de frecuencia es:

$$\tan kL = \tanh kL$$

20. Demostrar que las funciones normales de la vibración trasversal de barras son ortogonales.

La ecuación general de la vibración trasversal de barras es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

y la solución correspondiente es:

$$y = X(A \cos pt + B \text{ sen } pt) \qquad (2)$$

donde X es la función normal y una de las ecuaciones resultantes es (véase el problema 16),

$$\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{p^2}{a^2}X \qquad (3)$$

Si X_i y X_j son dos funciones normales correspondientes a dos modos normales de vibración, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^4X_i}{dx^4} = \frac{p_i^2}{a^2}X_i \qquad (4)$$

$$\frac{d^4X_j}{dx^4} = \frac{p_j^2}{a^2}X_j \qquad (5)$$

Multiplicando la ecuación (4) por X_j y la ecuación (5) por X_i y restando (4) de (5), tenemos:

$$\frac{p_j^2 - p_i^2}{a^2}\int_0^L X_i X_j\,dx = \int_0^L \left(X_i\frac{d^4X_j}{dx^4} - X_j\frac{d^4X_i}{dx^4}\right)dx \qquad (6)$$

de donde

$$\frac{p_j^2 - p_i^2}{a^2}\int_0^L X_i X_j\,dx = \left[X_i\frac{d^3X_j}{dx^3} - X_j\frac{d^3X_i}{dx^3} + \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_i}{dx^2} - \frac{dX_i}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2}\right]_0^L \qquad (7)$$

Las condiciones de contorno son:

(*a*) Para un extremo libre: el momento de flexión y la fuerza de corte son iguales a cero, es decir,

$$d^2X/dx^2 = 0, \quad d^3X/dx^3 = 0$$

(*b*) Para un extremo simplemente apoyado: el momento de flexión y la deflexión son iguales a cero, es decir,

$$d^2X/dx^2 = 0, \quad X = 0$$

(*c*) Para un extremo empotrado: la deflexión y la inclinación son iguales a cero, es decir,

$$X = 0, \quad dX/dx = 0$$

Remplazando estas condiciones de contorno en la ecuación (7) obtenemos:

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = 0, \qquad i \neq j$$

Esta ecuación se conoce como la condición de ortogonalidad de las funciones normales. En otras palabras, las funciones normales de la vibración trasversal de los casos arriba mencionados, son ortogonales.

21. Demostrar que las funciones normales de la viga que se muestra en la figura 5-17 son ortogonales.

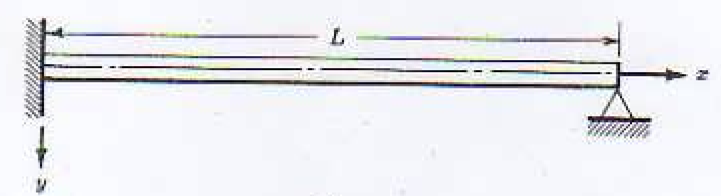


Fig. 5-17

La condición de ortogonalidad de los modos normales puede expresarse en la forma:

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = \frac{-a^2}{p_i^2 - p_j^2}\left[X_i\frac{d^3X_j}{dx^3} - X_j\frac{d^3X_i}{dx^3} + \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_i}{dx^2} - \frac{dX_i}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2}\right]_0^L$$

En este caso, para $x = L$ tenemos:

$$X_i = X_j = 0, \qquad d^2X_i/dx^2 = d^2X_j/dx^2 = 0$$

y para $x = 0$,

$$X_i = X_j = 0, \qquad dX_i/dx = dX_j/dx = 0$$

Remplazando estas condiciones de contorno en la ecuación que expresa la condición de ortogonalidad, encontramos que las funciones normales son ortogonales, es decir que.

$$\int_0^L X_i X_j\,dx = 0$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

22. Estudiar la condición de ortogonalidad de las funciones normales de la viga que se muestra en la figura 5-18.

La condición de ortogonalidad para la vibración trasversal de vigas está dada por:

$$\int_0^L X_i X_j\, dx = \frac{a^2}{p_j^2 - p_i^2}\left[X_i \frac{d^3X_j}{dx^3} - X_j \frac{d^3X_i}{dx^3} + \frac{dX_j}{dx}\frac{d^2X_i}{dx^2} - \frac{dX_i}{dx}\frac{d^2X_j}{dx^2}\right]_0^L$$

donde X_i y X_j son las funciones normales.

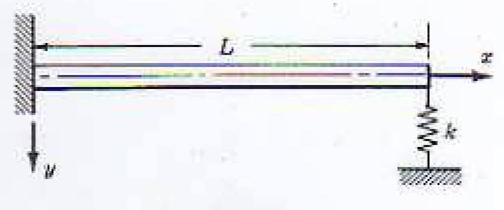


Fig. 5-18

En $x = L$ el momento de flexión es igual a cero, es decir que $d^2X_i/dx^2 = d^2X_j/dx^2 = 0$; y en el extremo fijo la deflexión y la inclinación son iguales a cero, es decir que

$$dX_i/dx = dX_j/dx = X_i = X_j = 0.$$

Por tanto la condición de ortogonalidad queda en la forma:

$$\int_0^L X_i X_j\, dx = \frac{a^2}{p_j^2 - p_i^2}\left[X_i \frac{d^3X_j}{dx^3} - X_j \frac{d^3X_i}{dx^3}\right]_{x=L}$$

Pero en el extremo libre de la viga la fuerza cortante es igual a la fuerza elástica, es decir que,

$$kX_i = EI(d^3X_i/dx^3) \qquad \text{y} \qquad kX_j = EI(d^3X_j/dx^3)$$

o sea que $X_i = (EI/k)(d^3X_i/dx^3)$ y $X_j = (EI/k)(d^3X_j/dx^3)$, de donde obtenemos: $\int_0^L X_i X_j\, dx = 0$. Luego las funciones normales son ortogonales.

23. En la figura 5-19 se muestra una viga simplemente apoyada de longitud L. En el tiempo $t = 0$ se golpea con un martillo una pequeña porción de la viga, s, produciéndose en esta porción una velocidad inicial V_0. Encontrar las vibraciones trasversales resultantes de la viga.



Fig. 5-19

La expresión general de la vibración trasversal de vigas simplemente apoyadas es:

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)$$

donde las constantes A_i y B_i son evaluadas de las condiciones iniciales y $p_i = ai^2\pi^2/L^2$. Haciendo $t = 0$ en la expresión anterior y en la derivada de esta expresión con respecto a t, tenemos:

$$(y)_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}, \qquad (\dot{y})_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

Las condiciones iniciales son:

$$y = 0 \text{ at } t = 0 \qquad \dot{y} = V_0,\ (c - s/2) \leq x \leq (c + s/2)$$

y por tanto $A_i = 0$ y

$$V_0\Big]_{(c-s/2)}^{(c+s/2)} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

o

$$\int_0^L p_i B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\, dx = \int_{(c-s/2)}^{(c+s/2)} V_0 \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\, dx$$

y $B_i = \dfrac{2V_0 L}{i\pi L p_i}\operatorname{sen}\dfrac{i\pi c}{L}\left(2 \operatorname{sen}\dfrac{i\pi s}{2L}\right)$. Por consiguiente, la vibración de la viga es:

$$y(x,t) = \frac{4V_0}{i\pi}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{p_i}\operatorname{sen}\frac{i\pi c}{L}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\operatorname{sen} p_i t \operatorname{sen}\frac{i\pi s}{2L}$$

24. La vibración de una viga simplemente apoyada que tiene aplicada en su punto medio una fuerza pulsativa F sen ωt está dada por la fórmula

$$y(x,t) = \frac{2gF_0}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2 - \omega^2)}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}\left(\operatorname{sen}\omega t - \frac{\omega}{p_i}\operatorname{sen} p_i t\right)$$

en la cual $p_i = i^2\pi^2 a/L^2$. Determinar la vibración de la viga si la carga se aplica durante medio ciclo, únicamente.

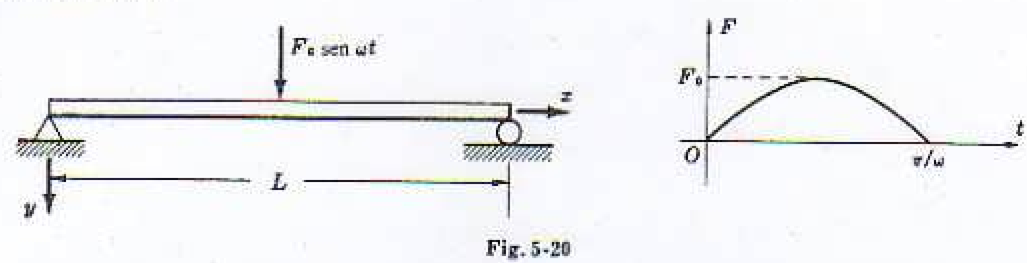


Fig. 5-20

Después de que se quita la carga pulsativa, es decir, al final del período π/ω, la viga tiene una vibración libre, cuyas condiciones iniciales están regidas por la fuerza aplicada al final del medio ciclo.

La expresión general de la vibración trasversal de una viga es:

$$y(x,T) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(A_i \cos p_i T + B_i \operatorname{sen} p_i T)$$

donde T es el tiempo trascurrido después de que se ha quitado la fuerza, o sea que $T = t - \pi/\omega$. Y de las condiciones iniciales tenemos:

$$y(x,\pi/\omega) = -\frac{2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)p_i}\operatorname{sen}\frac{p_i\pi}{\omega}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

$$\dot{y}(x,\pi/\omega) = -\frac{2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)}\left(1+\cos\frac{p_i\pi}{\omega}\right)\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

lo cual significa que $y(x,T)_{T=0} = y(x,\pi/\omega)$, $\quad \dot{y}(x,T)_{T=0} = \dot{y}(x,\pi/\omega)$

y $y(x,T)_{T=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$, $\quad \dot{y}(x,T)_{T=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$

Entonces,

$$\frac{-2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)p_i}\operatorname{sen}\frac{p_i\pi}{\omega}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

$$\frac{-2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)}\left(1+\cos\frac{p_i\pi}{\omega}\right)\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}$$

lo cual da

$$A_i = -\frac{2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)p_i}\operatorname{sen}\left(\frac{p_i\pi}{\omega}\right)$$

$$B_i = -\frac{2gF_0\omega}{A\gamma L}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} i\pi/2}{(p_i^2-\omega^2)p_i}\left(1+\cos\frac{p_i\pi}{\omega}\right)$$

y por tanto la vibración libre de la viga está dada por la fórmula:

$$y(x,T) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(A_i\cos p_i T + B_i\operatorname{sen} p_i T)$$

donde A_i y B_i ya han sido determinadas.

25. Una viga de longitud L está articulada en un extremo y el otro extremo es levantado una altura h a partir de la posición de reposo, como se muestra en la figura 5-21. Si la viga gira como un cuerpo rígido hasta el instante del impacto y no rebota, y si además se supone que no hay pérdida de energía, encontrar la vibración libre resultante.

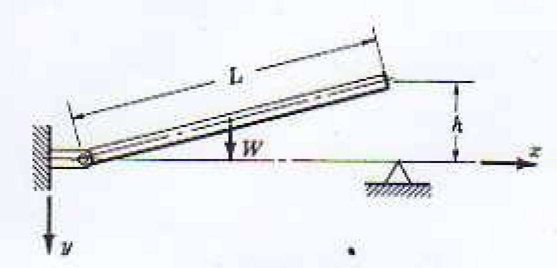


Fig. 5-21

Después del impacto la viga se convierte en una viga simplemente apoyada, con solución

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,3,\ldots}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{i\pi x}{L}(A_i\operatorname{sen} p_i t + B_i\cos p_i t)$$

medio

y sus condiciones iniciales son:

$$(1)\quad (y)_{t=0} = 0 \qquad (2)\quad (dy/dt)_{t=0} = \omega x$$

donde ω es la velocidad angular de la viga en el instante del impacto. De (1) obtenemos $B_i = 0$ y de (2),

$$\omega x = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i p_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}$$

o

$$\int_0^L \omega x \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}\,dx = A_i p_i \int_0^L \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}\,dx$$

de donde

$$A_i = -\frac{2\omega L}{i\pi p_i} \cos i\pi$$

Supongamos que el centro de gravedad está en el centro de la viga; entonces, puesto que ΔE.C. = ΔE.P., tenemos:

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2} Mgh, \qquad \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3} ML^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2} Mgh, \qquad \omega = \sqrt{3gh/L^2}$$

Por consiguiente la vibración libre de la viga en el instante del impacto está dada por la fórmula:

$$y(x,t) = \frac{2\sqrt{3gh}}{\pi} \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{ip_i}(-\cos i\pi) \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \operatorname{sen} p_i t$$

26. Una viga simplemente apoyada de longitud L soporta una carga uniformemente repartida de intensidad W, como se muestra en la figura 5-22. Encontrar la vibración resultante que se produce en la viga cuando la carga se retira repentinamente.

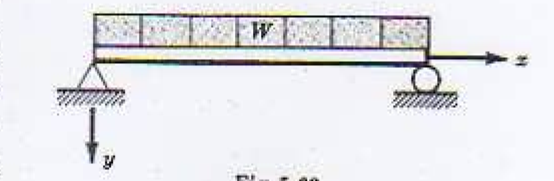


Fig. 5-22

Para vigas simplemente apoyadas, la expresión general de la vibración trasversal libre es:

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)$$

Haciendo $t = 0$ en la expresión anterior y en la derivada de esta expresión con respecto a t, obtenemos:

$$(y)_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} \qquad (\dot{y})_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} = 0$$

y así, $B_i = 0$. Como en $t = 0$, $EI(d^4y/dx^4) = W$, entonces,

$$EI \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i (i\pi/L)^4 \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L} = W$$

o $$A_i = \frac{2L^3}{EIi^4\pi^4} \int W \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}\,dx = \frac{2L^4 W}{EIi^5\pi^5}(1 - \cos i\pi) = \frac{4L^4 W}{EIi^5\pi^5} \quad \text{donde } i = 1, 3, 5, \ldots$$

Por consiguiente la vibración de la viga es:

$$y(x,t) = \frac{4WL^4}{\pi^5 EI} \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^5} \cos p_i t \operatorname{sen} \frac{i\pi x}{L}$$

27. Una carga concentrada F_0 se aplica en un punto de una viga simplemente apoyada, como se muestra en la figura 5-33. Si la carga F_0 se quita repentinamente, ¿qué vibraciones tendrán lugar en la viga?

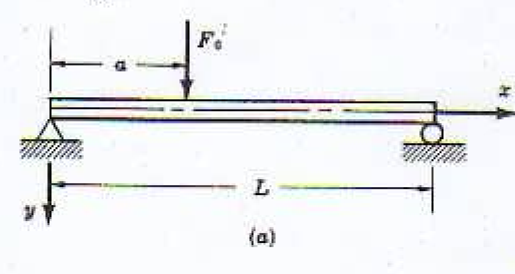




Fig. 5-23

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

La expresión general de la vibración trasversal libre de vigas simplemente apoyadas es:

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \text{sen}\,\frac{i\pi x}{L}(A_i \cos p_i t + B_i \,\text{sen}\, p_i t)$$

Haciendo $t = 0$ en la expresión anterior y en la derivada de esta expresión con respecto al tiempo t, obtenemos:

$$(y)_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \,\text{sen}\,\frac{i\pi x}{L} \qquad (\dot{y})_{t=0} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} p_i B_i \,\text{sen}\,\frac{i\pi x}{L}$$

De la condición inicial $\dot{y} = 0$ obtenemos $B_i = 0$; entonces,

$$y(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i \,\text{sen}\,\frac{i\pi x}{L} \cos p_i t$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i(i\pi/L)^3 \cos\frac{i\pi x}{L} \cos p_i t$$

Pero $d^3y/dx^3 = -Q/EI$, siendo Q la fuerza cortante a lo largo de la viga. Igualando las dos expresiones tenemos:

$$\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} A_i(i\pi/L)^3 \cos\frac{i\pi x}{L} = Q/EI$$

donde

$$Q = \begin{cases} F_0(L-a)/L & 0 \le x \le a \\ -F_0 a/L & a \le x \le L \end{cases}$$

Multiplicando los dos miembros de la expresión anterior por $\cos i\pi x/L$ e integrando, obtenemos:

$$A_i = \frac{2L^2}{i^3\pi^3}\int_0^L (Q/EI)\cos\frac{i\pi x}{L}\,dx$$

Remplazando la expresión de Q en la ecuación anterior, obtenemos:

$$A_i = \frac{2L^2}{i^3\pi^3}\left[\int_0^a \frac{F_0(L-a)/L}{EI}\cos\frac{i\pi x}{L}\,dx - \int_a^L \frac{F_0 a/L}{EI}\cos\frac{i\pi x}{L}\,dx\right] = \frac{2L^3F_0}{i^4\pi^4EI}\,\text{sen}\,\frac{i\pi a}{L}$$

y por tanto, la vibración de la viga es:

$$y(x,t) = \frac{2F_0L^3}{\pi^4EI}\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{1}{i^4}\,\text{sen}\,\frac{i\pi a}{L}\,\text{sen}\,\frac{i\pi x}{L}\cos p_i t$$

28. Una fuerza uniformemente distribuida de intensidad F_0 sen ωt se aplica a una viga simplemente apoyada de longitud L, como se muestra en la figura 5-24. Determinar la vibración del estado estacionario de la viga.

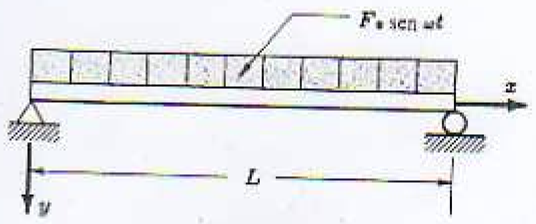


Fig. 5-24

La ecuación general de la vibración trasversal de barras que tienen aplicada una fuerza exterior es:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{F_0 g}{A\gamma}\,\text{sen}\,\omega t$$

donde $a^2 = EIg/A\gamma$, A = área de la sección trasversal, γ = peso específico.

Supongamos una solución particular de la forma

$$y(x,t) = X(x)\,\text{sen}\,\omega t$$

Remplacemos esta solución en la ecuación general para obtener:

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \frac{\omega^2}{a^2}X = \frac{F_0 g}{A\gamma a^2}$$

cuya solución completa es:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\omega/a}\,x + C_2\,\text{sen}\sqrt{\omega/a}\,x + C_3\cosh\sqrt{\omega/a}\,x + C_4\,\text{senh}\sqrt{\omega/a}\,x - F_0 g/A\gamma\omega^2$$

En este caso las condiciones de contorno son:

$$(X)_{x=0} = 0, \quad (d^2X/dx^2)_{x=0} = 0 \qquad (X)_{x=L} = 0, \quad (d^2X/dx^2)_{x=L} = 0$$

De las dos primeras condiciones de borde tenemos que $C_1 = C_3 = F_0 g/2A\gamma\omega^2$; y de las otras dos:

$$C_2 = \frac{F_0 g}{2A\gamma\omega^2}\tan(\sqrt{\omega/a}\,L/2), \qquad C_4 = \frac{-F_0 g}{2A\gamma\omega^2}\tanh(\sqrt{\omega/a}\,L/2)$$

Como $y(x,t) = X \operatorname{sen} \omega t$, entonces la vibración del estado estacionario es:

$$y(x,t) = \frac{F_0 g}{A\gamma\omega^2}\left\{\frac{\cos[\sqrt{\omega/a}\,(L/2-x)]}{2\cos(\sqrt{\omega/a}\,L/2)} + \frac{\cosh[\sqrt{\omega/a}\,(L/2-x)]}{2\cosh(\sqrt{\omega/a}\,L/2)} - 1\right\}\operatorname{sen}\omega t$$

29. Determinar la ecuación de frecuencia de la viga que se muestra en la figura 5-25.

Sean X_1 y X_2 las funciones normales de la viga. La solución general de las funciones normales puede expresarse como:

$$X_1 = A_1\cos kx_1 + B_1\cosh kx_1 + C_1\operatorname{sen} kx_1 + D_1\operatorname{senh} kx_1$$

$$X_2 = A_2\cos kx_2 + B_2\cosh kx_2 + C_2\operatorname{sen} kx_2 + D_2\operatorname{senh} kx_2$$

Fig. 5-25

Las condiciones de contorno son:

en $x_1 = 0$, $X_1 = 0$ (1), $dX_1/dx_1 = 0$ (2) en $x_1 = L$, $X_1 = 0$ (5), $dX_1/dx_1 = -dX_2/dx_2$ (6)

en $x_2 = 0$, $X_2 = 0$ (3), $dX_2/dx_2 = 0$ (4) en $x_2 = L$, $X_2 = 0$ (7), $d^2X_2/dx_2^2 = -d^2X_1/dx_1^2$ (8)

De las condiciones (1) y (3) tenemos que $A_1 = -B_1$ y $A_2 = -B_2$. Teniendo esto en cuenta en (2) y (4) obtenemos: $C_1 = -D_1$ y $C_2 = -D_2$.

Utilizando (5) y (7) tenemos:

$$A_1(\cos kL - \cosh kL) + C_1(\operatorname{sen} kL - \operatorname{senh} kL) = 0$$
$$A_2(\cos kL - \cosh kL) + C_2(\operatorname{sen} kL - \operatorname{senh} kL) = 0$$

por tanto, A_1 y A_2 pueden expresarse en función de C_1 y C_2, respectivamente, o sea que,

$$A_1 = \frac{-C_1(\operatorname{sen} kL - \operatorname{senh} kL)}{(\cos kL - \cosh kL)} \qquad A_2 = \frac{-C_2(\operatorname{sen} kL - \operatorname{senh} kL)}{(\cos kL - \cosh kL)}$$

De las condiciones (6) y (8) tenemos:

$$-A_1(\operatorname{sen} kL + \operatorname{senh} kL) + C_1(\cos kL - \cosh kL) = A_2(\operatorname{sen} kL + \operatorname{senh} kL) - C_2(\cos kL - \cosh kL)$$
$$-A_1(\cos kL + \cosh kL) - C_1(\operatorname{sen} kL + \operatorname{senh} kL) = A_2(\cos kL + \cosh kL) + C_2(\operatorname{sen} kL + \operatorname{senh} kL)$$

Remplazando las expresiones de A_1 y A_2 en las ecuaciones anteriores y resolviendo estas para C_1 y C_2, encontramos:

$$(\operatorname{sen} kL \cosh kL - \cos kL \operatorname{senh} kL)(1 - \cos kL \cosh kL) = 0$$

y por tanto las ecuaciones de frecuencia son:

$$\cos kL \cosh kL = 1, \qquad \tan kL = \tanh kL$$

30. Encontrar las condiciones de contorno de la viga continua que se muestra en la figura 5-26.



Fig. 5-26

Supongamos que la rigidez a la flexión de la viga es igual en los tres tramos. La deflexión en los extremos y en los soportes es igual a cero, es decir que

$$(X_1)_{x_1=0} = (X_1)_{x_1=L} = (X_2)_{x_2=0} = (X_2)_{x_2=L} = (X_3)_{x_3=0} = (X_3)_{x_3=L} = 0$$

La inclinación en los extremos es igual a cero,

$$(dX_1/dx_1)_{x_1=0} = (dX_3/dx_3)_{x_3=L} = 0$$

y $$(dX_1/dx_1)_{x_1=L} = (dX_2/dx_2)_{x_2=0}, \qquad (dX_2/dx_2)_{x_2=L} = (dX_3/dx_3)_{x_3=0}$$

Los momentos de flexión en los soportes se pueden expresar como:

$$(d^2X_2/dx_2^2)_{x_2=0} = (d^2X_1/dx_1^2)_{x_1=L}, \qquad (d^2X_2/dx_2^2)_{x_2=L} = (d^2X_3/dx_3^2)_{x_3=0}$$

Por consiguiente hay veinte condiciones de contorno para vigas de tres tramos.

VIBRACIONES TORSIONALES

31. Deducir la ecuación diferencial de movimiento de la vibración torsional libre de un eje circular, si la masa del eje no es pequeña y por tanto no puede despreciarse.

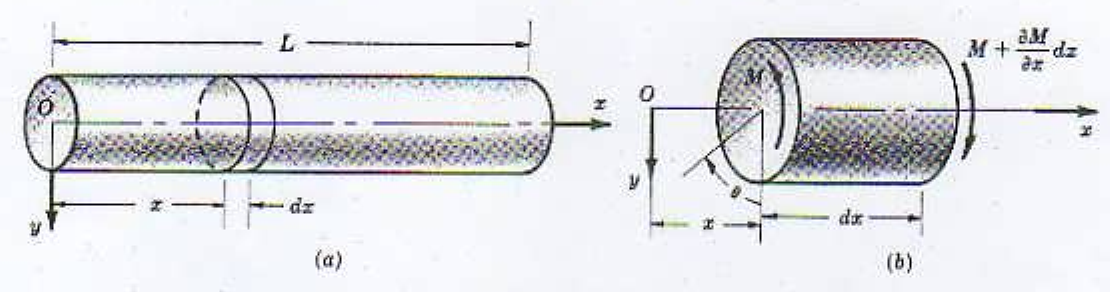


Fig. 5-27

Supongamos que la deformación del eje durante la vibración torsional es pequeña, de suerte que su sección trasversal permanece plana y sus radios permanecen rectos.

Como se indica en la figura 5-27(*b*), y con base en la resistencia de materiales, el momento de torsión que actúa sobre una sección trasversal cualquiera es:

$$GI_p \frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad GI_p\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx\right)$$

donde

$\partial\theta/\partial x$ = ángulo de torsión por unidad de longitud del eje.

G = módulo cortante de elasticidad.

I_p = momento polar de inercia de la sección trasversal.

(A veces GI_p se denomina rigidez torsional del eje.)

El momento de inercia de un elemento cualquiera dx es igual a

$$\frac{I_p\gamma}{g}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}dx$$

donde γ = peso por unidad de volumen del eje.

Se puede escribir una ecuación, que exprese el movimiento rotatorio de un elemento del eje, considerando el momento de torsión y el momento de inercia.

$$GI_p\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{\gamma I_p}{g}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

donde $a^2 = Gg/\gamma$.

Observamos que esta ecuación de movimiento tiene la misma forma que la ecuación de movimiento que se obtuvo anteriormente para la vibración longitudinal de barras uniformes, es decir,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = E/\rho \qquad \text{(vibración longitudinal de barras)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad a^2 = G/\rho \qquad \text{(vibración torsional de ejes)}$$

Es evidente que cualquiera de los problemas resueltos en la sección dedicada a la vibración longitudinal de barras puede aplicarse igualmente a la vibración torsional de ejes.

32. Deducir la ecuación de frecuencia de la vibración torsional de un eje de sección circular uniforme que tiene dos rotores unidos rígidamente a los extremos, como se muestra en la figura 5-28.

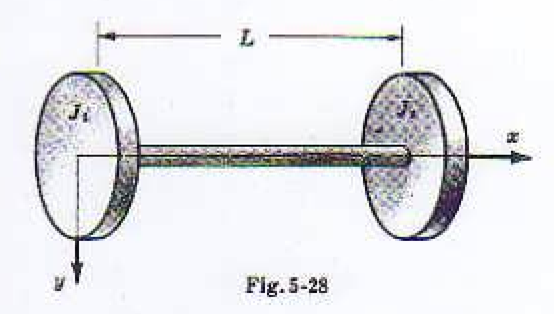


Fig. 5-28

Como las ecuaciones de movimiento para la vibración torsional de ejes circulares y para la vibración longitudinal de barras uniformes son idénticas, la solución general de la vibración torsional de ejes circulares puede expresarse en la siguiente forma:

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)(C_i \cos p_i x/a + D_i \operatorname{sen} p_i x/a)$$

donde $a^2 = G/\rho$ y p_i = frecuencias naturales del eje.

La torsión en los extremos del eje es producida por la fuerza de inercia de los rotores, es decir que las condiciones de contorno son:

en $x = 0$, $\quad J_1(\partial^2\theta/\partial t^2) = GI_p(\partial\theta/\partial x) \quad (1)$

en $x = L$, $\quad J_2(\partial^2\theta/\partial t^2) = -GI_p(\partial\theta/\partial x) \quad (2)$

donde G = módulo cortante de elasticidad, I_p = momento polar de inercia. De (1) tenemos:

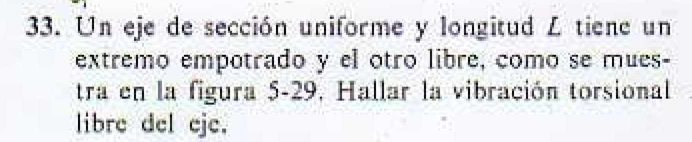
$$p_i^2 J_1 C_i + (p_i G I_p/a) D_i = 0$$

y de (2),

$$\left(p_i^2 J_2 \cos p_i L/a + \frac{p_i G I_p}{a} \operatorname{sen} p_i L/a\right) C_i + \left(p_i^2 J_2 \operatorname{sen} p_i L/a - \frac{p_i G I_p}{a} \cos p_i L/a\right) D_i = 0$$

La ecuación de frecuencia, que se obtiene igualando a cero el determinante de los coeficientes de C_i y D_i, es:

$$p_i^2 \left(\cos p_i L/a - \frac{p_i a J_1}{G I_p} \operatorname{sen} p_i L/a\right) J_2 + \frac{p_i G I_p}{a}\left(\operatorname{sen} p_i L/a + \frac{p_i a J_1}{G I_p} \cos p_i L/a\right) = 0$$



33. Un eje de sección uniforme y longitud L tiene un extremo empotrado y el otro libre, como se muestra en la figura 5-29. Hallar la vibración torsional libre del eje.

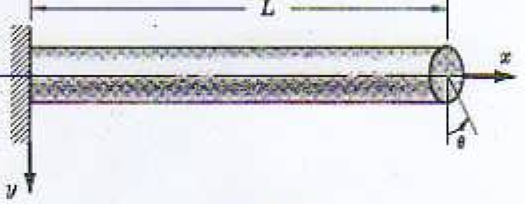


Fig. 5-29

La ecuación diferencial de movimiento de la vibración torsional libre del eje es:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

donde θ = desplazamiento angular y $a^2 = G/\rho$. La solución general es:

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)(C_i \cos p_i x/a + D_i \operatorname{sen} p_i x/a)$$

Las condiciones de contorno son:

en $x = 0$, $\quad \theta(0,t) = 0 \quad (1)$

en $x = L$, $\quad GI_p(\partial\theta/\partial x) = 0 \quad (2)$

donde I_p es el momento polar de inercia del eje. Utilizando la ecuación (1) tenemos:

$$\theta(0,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} C_i(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0 \qquad \text{o} \qquad C_i = 0$$

y de la ecuación de contorno (2),

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (\operatorname{sen} p_i x/a)(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)$$

$$(\partial\theta/\partial x)_{x=L} = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{p_i}{a}(\cos p_i L/a)(A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t) = 0$$

o $\qquad \cos p_i L/a = 0, \quad p_i = i\pi a/2L, \qquad$ donde $i = 1, 3, 5, \ldots$

Por consiguiente, la vibración torsional del eje es:

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{i\pi x}{2L}\left(A_i \cos\frac{i\pi a t}{2L} + B_i \operatorname{sen}\frac{i\pi a t}{2L}\right)$$

donde A_i y B_i son constantes determinadas de las condiciones iniciales del problema.

34. Una polea, cuyo momento de inercia es J, está rígidamente unida al extremo libre de un eje uniforme de longitud L, como se muestra en la figura 5-30. Encontrar la ecuación de frecuencia de la vibración torsional.

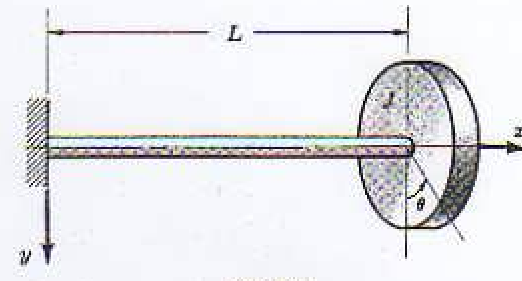


Fig. 5-30

La ecuación diferencial de movimiento para la vibración torsional del eje y su correspondiente solución general están dadas por las fórmulas:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} (A_i \cos p_i t + B_i \operatorname{sen} p_i t)(C_i \cos p_i x/a + D_i \sin p_i x/a)$$

donde $a^2 = G/\rho$ y p_i = frecuencias naturales.

Las condiciones de contorno de este problema son:

$$\theta(0,t) = 0 \qquad (1)$$

$$-GI_p(\partial\theta/\partial x)_{x=L} = J(\partial^2\theta/\partial t^2) \qquad (2)$$

es decir, que el desplazamiento angular del eje en el extremo fijo es igual a cero y el momento restaurador del eje en el extremo libre es igual al momento de inercia de la polea.

De la condición (1) tenemos que, $C_i = 0$ y de (2),

$$-\frac{GI_p p_i}{a}\cos\frac{p_i L}{a} = -Jp_i^2 \operatorname{sen}\frac{p_i L}{a} \qquad \text{o} \qquad \tan\frac{p_i L}{a} = \frac{GI_p}{aJp_i}$$

que es la ecuación de frecuencia.

35. Si al extremo libre de un eje uniforme de longitud L se le aplica un momento torsional externo T_0 sen ωt, como se indica en la figura 5-31, encontrar la vibración del estado estacionario del eje.

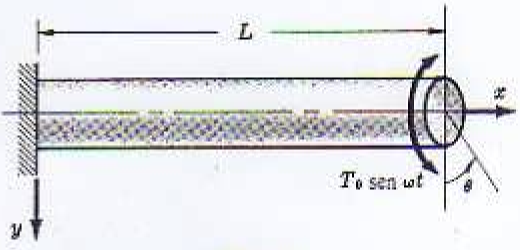


Fig. 5-31

La ecuación diferencial de movimiento de la vibración torsional libre del eje es:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \qquad (1)$$

donde θ = torsión del eje, $a^2 = G/\rho$. Sea la vibración del estado estacionario

$$\theta = X(x)\operatorname{sen}\omega t \qquad (2)$$

Remplazando (2) en (1) obtenemos:

$$a^2\frac{d^2X}{dx^2}\operatorname{sen}\omega t + X\omega^2\operatorname{sen}\omega t = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{a^2}X = 0$$

Por consiguiente, $$X(x) = A\cos\omega x/a + B\operatorname{sen}\omega x/a$$

Las condiciones de contorno del problema son: la torsión del eje en el extremo fijo es igual a cero y el momento restaurador del eje en el extremo libre es igual al momento torsional aplicado, es decir,

$$X(0) = 0, \quad GI_p(\partial\theta/\partial x)_{x=L} = T_0\operatorname{sen}\omega t \qquad (3)$$

donde G = módulo cortante de elasticidad, I_p = momento polar de inercia del eje.

Utilizando la primera ecuación de (3) encontramos que $A = 0$, y de la segunda ecuación de (3) tenemos:

$$\frac{GI_pB\omega}{a}\cos\frac{\omega L}{a}\,\text{sen}\,\omega t \;=\; T_0\,\text{sen}\,\omega t \qquad \text{o} \qquad B \;=\; \frac{T_0\,a}{GI_p\omega}\sec\frac{\omega L}{a}$$

Por consiguiente la vibración del estado estacionario es:

$$\theta(x,t) \;=\; \frac{T_0\,a}{GI_p\omega}\sec\frac{\omega L}{a}\,\text{sen}\,\frac{\omega x}{a}\,\text{sen}\,\omega t$$

Problemas propuestos

36. Determinar el período del modo fundamental de vibración de una varilla de acero de longitud 1000 pies y peso específico 0,28 lb/pul³, si esta varilla se considera como una barra con ambos extremos libres. *Resp.* $T = 0{,}12$ seg

37. Una barra uniforme de longitud L tiene el extremo superior empotrado y el inferior libre, como se muestra en la figura 5-32. Demostrar que una fuerza aplicada repentinamente en el extremo libre produce una deflexión que es el doble de la producida por esta misma fuerza aplicada gradualmente.

38. Calcular la deflexión del extremo inferior de una varilla vertical uniforme debida a su propio peso.

Resp. Deflexión $= wL^2/2E$, donde w = peso específico de la barra, L = longitud de la barra y E = módulo de elasticidad



39. Demostrar que la ecuación diferencial de movimiento de la vibración longitudinal libre de una barra que tiene sección trasversal variable es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde $A = A(x)$ es el área de la sección trasversal de la barra.

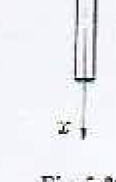


Fig. 5-32

40. A toda la longitud de una viga simplemente apoyada de longitud L se le imprime una velocidad inicial V_0. Deducir la expresión de la vibración trasversal libre de la viga.

Resp. $y(x,t) \;=\; \dfrac{4V_0}{\pi}\displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{ip_i}\,\text{sen}\,i\pi x/L\;\text{sen}\,p_i t$

41. Una fuerza axial constante F_0 actúa sobre el centro de gravedad de una barra uniforme de longitud L, como se muestra en la figura 5-33. Encontrar la vibración que se produce, si esta fuerza se quita repentinamente.

Resp. $u(x,t) \;=\; \dfrac{2F_0L}{AE\pi^2}\displaystyle\sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty}(-1)^{(i-1)/2}\left[\frac{1}{i^2}\,\text{sen}\,\frac{i\pi x}{L}\cos\frac{i\pi a}{L}t\right]$



Fig. 5-33

42. En la acción de levantar una larga varilla de perforación se aplica repentinamente una fuerza F_0 en un extremo de ésta. Determinar la vibración longitudinal resultante.

Resp. $u(x,t) \;=\; \dfrac{gt^2F_0}{2\gamma LA} + \dfrac{2gLF_0}{\pi^2a^2A}\displaystyle\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i^2}\cos\frac{i\pi x}{L}\left(1 - \cos\frac{i\pi a}{L}t\right)$

43. Estudiar el efecto de una fuerza longitudinal constante sobre la frecuencia natural de una barra uniforme que está sometida a una vibración longitudinal. *Resp.* No produce ningún efecto

44. Una barra uniforme de longitud L se está moviendo axialmente en un plano horizontal, con velocidad V_0. Si la barra choca contra una pared sólida y para, ¿cuál será la vibración de la barra?

Resp. $u(x, t) = \frac{8V_0 L}{\pi^2 a} \sum_{i=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^2} \text{sen}\, \frac{i\pi x}{2L} \text{sen}\, \frac{i\pi a}{2L} t$

45. Demostrar que el efecto de la contracción lateral sobre la vibración longitudinal de una barra uniforme es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde μ = razón de Poisson y $k^2 = \int r^2 dA$.

46. Una función fuerza F_0 sen ωt está actuando en el extremo $x = 0$ de una barra uniforme de longitud L, como se muestra en la figura 5-34. Si los dos extremos de la barra están libres, encontrar la respuesta del estado estacionario de la barra.

Resp. $u(x, t) = \frac{F_0 L}{AE}(a/\omega L) \text{ cosec } \frac{\omega L}{a} \cos\left[\frac{\omega}{a}(L - x)\right] \text{sen}\, \omega t$



Fig. 5-34

47. Deducir la ecuación de frecuencia de la vibración trasversal de una viga uniforme de longitud L, si uno de los extremos de ésta está fijo y el otro libre. *Resp.* $\cos kL \cosh kL = -1$

48. Deducir la ecuación de frecuencia de la vibración trasversal de una viga uniforme de longitud L, si los dos extremos de ésta están fijos. *Resp.* $\cos kL \cosh kL = 1$

49. ¿Cuál es el efecto de una fuerza longitudinal constante (tensión y compresión) sobre la frecuencia natural de una barra uniforme que tiene una vibración trasversal?

Resp. Tensión: la frecuencia aumenta. Compresión: la frecuencia disminuye

50. Deducir la ecuación de frecuencia de la vibración longitudinal de una varilla que tiene dos secciones trasversales diferentes, cuyas áreas son A_1 y A_2, respectivamente, como se muestra en la figura 5-35.

Resp. $\tan p_i L/a_1 \tan p_i L/a_2 = A_1 a_1 \rho_1 / A_2 a_2 \rho_2$

51. Demostrar que el término $\frac{\gamma I}{g} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2}$ representa el efecto de la inercia rotatoria de la viga en la ecuación diferencial de movimiento de la vibración trasversal de vigas.

Fig. 5-35

52. Determinar la vibración del estado estacionario de una viga simplemente apoyada de longitud L que está bajo la acción de una fuerza concentrada F_0 sen ωt, como se muestra en la figura 5-36.

Resp. $y(x, t) = \frac{2F_0 L^3}{\pi^4 EI} \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \frac{1}{i^4} \frac{1}{1 - (\omega/p_i)^2} \text{sen}\, i\pi a/L \text{ sen}\, i\pi x/L \text{ sen}\, \omega t$

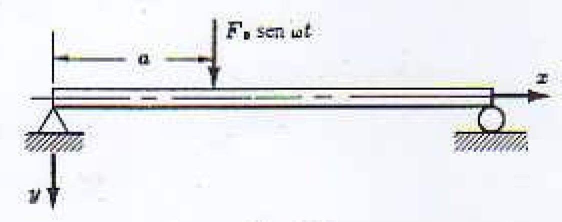


Fig. 5-36

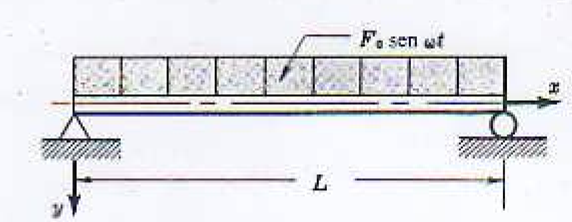


Fig. 5-37

53. Probar que para que la deflexión en el centro de la viga sea igual a cero, la siguiente expresión debe ser cierta (véase la figura 5-37): $\sec(\sqrt{\omega/a}\, L/2) + \text{sech}(\sqrt{\omega/a}\, L/2) = 0$.

54. Demostrar que la ecuación diferencial de movimiento de la vibración torsional de un eje circular con diámetro variable es:

$$\rho(x)\, I_p(x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = G\left[I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial I_p}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x}\right]$$

donde $\rho(x)$ es la densidad de masa del material del eje.

Capítulo 6

Vibraciones no lineales

INTRODUCCION

Muchos problemas vibracionales de ingeniería son de naturaleza no lineal, es decir, que las fuerzas restauradoras no son proporcionales a los desplazamientos y las fuerzas de amortiguamiento no son proporcionales a la primera potencia de la velocidad. Este fenómeno también se presenta en sistemas vibrantes lineales que tienen un movimiento de magnitud apreciable. En estos casos el análisis lineal usual puede resultar inconveniente en muchas aplicaciones y debe, por tanto, emplearse un análisis que implica el uso de ecuaciones diferenciales no lineales, el cual es más exacto.

Una característica esencial del estudio de los sistemas no lineales es que su solución general no puede obtenerse por superposición, como en el caso de los sistemas lineales. Además, en muchos casos, en los sistemas no lineales ocurren nuevos fenómenos que no se presentan en los sistemas lineales.

En general, se necesitan matemáticas avanzadas para el análisis y la solución de sistemas no lineales, debido a sus configuraciones complicadas y a sus ecuaciones diferenciales de movimiento no lineales. Aquí presentamos unos pocos ejemplos sencillos.

VIBRACIONES LIBRES SIN AMORTIGUAMIENTO CON FUERZAS RESTAURADORAS NO LINEALES

En la práctica tienen lugar frecuentemente vibraciones libres de sistemas no amortiguados, que tienen fuerzas restauradoras no lineales. La ecuación diferencial de movimiento tiene la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0$$

donde x es el desplazamiento y $f(x)$ es la fuerza restauradora no lineal, que es una función de x. La solución de la ecuación anterior puede expresarse en integrales elípticas. (Véase el problema 3.)

VIBRACIONES FORZADAS SIN AMORTIGUAMIENTO CON FUERZAS RESTAURADORAS NO LINEALES

La ecuación diferencial de movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = F_0 \cos \omega t$$

donde x = desplazamiento,
$f(x)$ = fuerza restauradora no lineal expresada como una función de x,
$F_0 \cos \omega t$ = función fuerza externa.

La solución de la ecuación anterior puede obtenerse por el método iterativo. (Véase el problema 5.)

VIBRACIONES AUTOEXCITADAS

Vibraciones autoexcitadas son las *vibraciones autogobernadas* que adquieren su energía de elementos externos, a causa de sus propios movimientos periódicos. En otras palabras, la fuerza de excitación es una función del desplazamiento, de la velocidad o de la aceleración de la masa del sistema.

La cantidad de energía de un sistema que tiene una vibración autoexcitada crecerá continuamente hasta que sea balanceada por una cantidad igual de energía disipada por el sistema, en forma de amortiguamiento. La vibración autoexcitada se reducirá, entonces, a una vibración de estado estacionario que tiene una frecuencia próxima a la frecuencia natural del sistema. Por otra parte, si la rata de energía disipada es menor que la rata de energía absorbida por el sistema, el movimiento de éste continuará aumentando la energía total presente en él y, en consecuencia, el sistema se romperá.

ESTABILIDAD

Si la amplitud de la vibración disminuye con el tiempo se dice que el sistema es *estable* y si aumenta indefinidamente con el tiempo, se dice que el sistema es *inestable*.

Algunos sistemas pueden parecer inestables para pequeños períodos de tiempo, pero realmente son estables para períodos de tiempo largos. En particular, los sistemas no lineales pueden ser inestables para pequeñas magnitudes de movimiento, pero se estabilizan por sí mismos sobre un *ciclo límite* para algunos valores de movimiento mayores. Cuando las amplitudes de vibración llegan a ser grandes, los sistemas lineales no reaccionarán linealmente y entrarán también en un ciclo límite estable.

En los sistemas estables, la energía total del sistema disminuye con el tiempo. La energía perdida generalmente se disipa en forma de calor, debido a la fricción. Por consiguiente, el amortiguamiento de los sistemas estables debe ser positivo.

En los sistemas inestables se debe estar agregando continuamente energía al sistema, puesto que hay un continuo incremento de la amplitud de vibración. Por consiguiente, la fuerza de amortiguamiento hace un trabajo sobre el sistema. En consecuencia, el amortiguamiento de los sistemas inestables es negativo.

Así, un sistema será inestable si la parte real de una cualquiera de las raíces de la ecuación característica de un sistema amortiguado es positiva, esto es,

$$s_1 = r_1 + id_1$$
$$s_2 = r_1 - id_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x(t) = e^{r_1 t}(A\cos d_1 t + B \operatorname{sen} d_1 t) + \cdots$$

donde $s_1, s_2, \ldots$ son las raíces de la ecuación característica e $i = \sqrt{-1}$.

En los sistemas conservativos se puede utilizar el principio de la *energía potencial mínima* para probar la estabilidad de un sistema. Un sistema será estable en una posición de equilibrio si la energía potencial del sistema es mínima en esta posición, es decir,

$$\frac{d(\text{E.P.})}{dq} = 0, \qquad \frac{d^2(\text{E.P.})}{dq^2} > 0$$

donde E.P. = energía potencial del sistema,
q = coordenadas generalizadas.

Problemas resueltos

1. En la figura 6-1 se dan dos sistemas vibratorios. Demostrar que estos sistemas tienen rigidez variable.

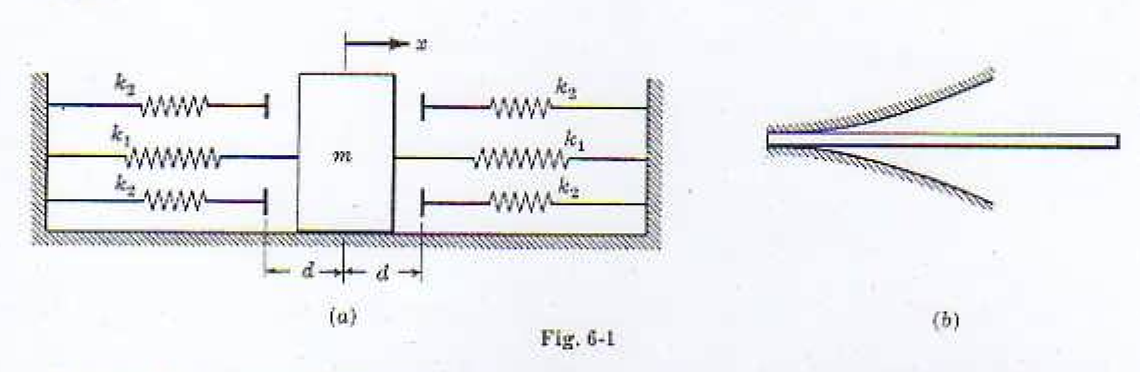


Fig. 6-1

(*a*) En el sistema simple masa-resorte que se muestra en la figura 6-1(*a*), los resortes k_1 están unidos a m todo el tiempo, mientras que los resortes k_2 actúan solamente cuando el desplazamiento de la masa m es mayor que d. Como suponemos que los resortes se comportan linealmente y las superficies son lisas, tenemos:

$$F(t) = 2k_1 x \qquad \text{(cuando el desplazamiento es menor que } d\text{)}$$

$$F(t) = 2k_1 x + 2k_2(x-d) = (2k_1 - 2k_2)x - 2k_2 d \qquad \text{(cuando el desplazamiento es mayor que } d\text{)}$$

es decir, cuando el desplazamiento de la masa m es mayor que d, los resortes k_2 entran en acción, con lo cual se aumenta la constante elástica total del sistema. En la figura 6-1(*c*) se indica la variación de la fuerza elástica con el desplazamiento.

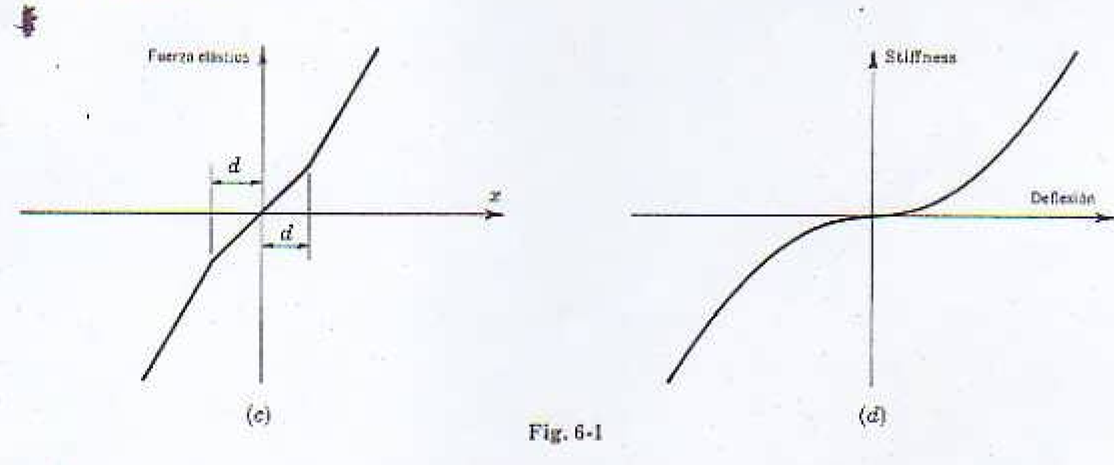


Fig. 6-1

(*b*) En el voladizo que se muestra en la figura 6-1(*b*), el extremo fijo entrará en contacto con la guía curva a medida que éste se deflecta. Cuando la deflexión aumenta, la superficie de contacto también aumenta. Por tanto, la deflexión hace disminuir la longitud efectiva del voladizo, es decir que a mayor deflexión, menor longitud efectiva de éste. Como la rigidez del voladizo depende de su longitud efectiva, la deflexión de éste aumenta su rigidez. En resumen, el sistema tiene rigidez variable, como se indica en la figura 6-1(*d*).

2. Una masa m está suspendida por un alambre extendido que tiene una tensión inicial T, como se muestra en la figura 6-2. Demostrar que la ecuación diferencial de movimiento que rige el sistema no es lineal.

En el problema 5 del capítulo 1 se hace el análisis de un problema parecido, en el cual se supone que la tensión en el alambre es constante. Aquí tendremos en cuenta el efecto de la variación de la tensión. Para un desplazamiento vertical de la masa, y, la correspondiente deformación en el alambre, ϵ, es:

$$\epsilon = \frac{\sqrt{L^2/4 + y^2} - L/2}{L/2}$$

donde L es la longitud del alambre. En consecuencia la tensión del alambre después del desplazamiento será $(T + AE\epsilon)$, donde A es el área de la sección trasversal y E es el módulo de elasticidad.

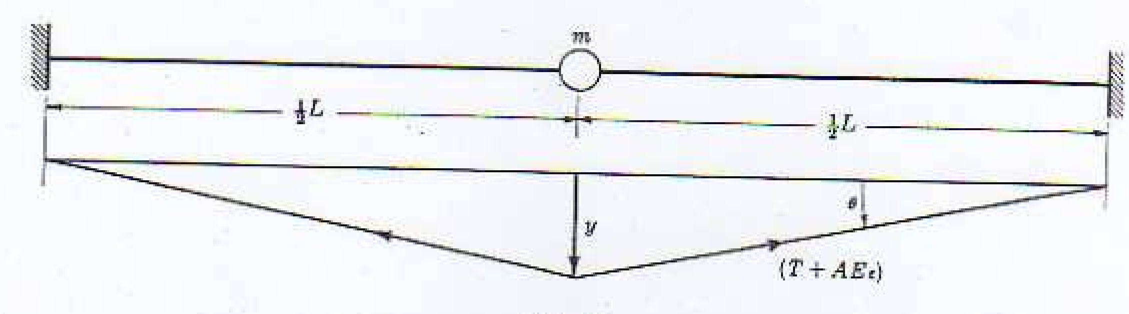


Fig. 6-2

Como se muestra en la figura 6-2, la fuerza restauradora que actúa sobre la masa m en la dirección y es $2(T + AE\epsilon)$ sen θ, donde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{L^2/4 + y^2}}$$

Suponiendo que el desplazamiento y es pequeño comparado con L, tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}} = \frac{1}{(L/2)\sqrt{1 + (2y/L)^2}} = (2/L)[1 - \tfrac{1}{2}(2y/L)^2 + \cdots]$$

o

$$\operatorname{sen}\theta = 2y/L - 4y^3/L^3$$

Puesto que esta es una vibración libre sin amortiguamiento, la ecuación diferencial de movimiento está dada por la fórmula:

$$m\ddot{y} + 2y(T + AE\epsilon)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Remplazando ϵ y sen θ por las expresiones correspondientes, tenemos:

$$m\ddot{y} + \frac{4T}{L}y + \frac{8AE}{L^3}\left(1 - \frac{T}{AE}\right)y^3 = 0$$

o

$$m\ddot{y} + \frac{4T}{L}y + \frac{8AE}{L^3}y^3 = 0$$

ya que el término (T/AE) representa la deformación inicial del alambre, la cual es despreciable comparada con la unidad. Por consiguiente la ecuación de movimiento no es lineal.

3. Un péndulo simple sin fricción, como el que se muestra en la figura 6-3, se suelta desde un ángulo θ_0 sin velocidad inicial, (*a*) calcular la frecuencia natural para ángulos de oscilación pequeños. (*b*) Utilizar dos términos de una serie de potencias como aproximación de sen θ y encontrar la frecuencia natural utilizando integrales elípticas para $\theta_0 = 90°$. (*c*) Determinar la frecuencia natural utilizando la forma exacta de la ecuación diferencial de movimiento del péndulo.



Fig. 6-3

(*a*) Para ángulos de oscilación pequeños, la ecuación diferencial de movimiento se convierte en:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\operatorname{sen}\theta$$

o

$$\ddot{\theta} + (g/L)\theta = 0$$

donde se ha remplazado sen θ por θ. Entonces,

$$\omega_n = \sqrt{g/L}\ \text{rad/seg}, \qquad T = \frac{6.28}{\sqrt{g/L}}\ \text{seg}$$

(*b*) Remplazando sen θ por $(\theta - \theta^3/6)$, la ecuación de movimiento queda:

$$\ddot{\theta} + (g/L)\theta - (g/6L)\theta^3 = 0$$

Haciendo $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ y $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$, obtenemos:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\, d\omega = -\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g\theta}{L}\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{g\theta^3}{6L}\, d\theta$$

lo cual da

$$\omega^2 = \frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2) - \frac{g}{12L}(\theta_0^4 - \theta^4) \qquad \text{o} \qquad \omega = -\sqrt{\frac{g}{L}(\theta_0^2 - \theta^2)}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{12}(\theta_0^2 + \theta^2)}\right] = \frac{d\theta}{dt}$$

Hagamos $\theta = \theta_0 \cos\phi$; entonces,

$$\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2} = \theta_0 \operatorname{sen}\phi, \qquad \theta_0^2 + \theta^2 = \theta_0^2(1 + \cos^2\phi),$$
$$d\theta = -\theta_0 \operatorname{sen}\phi\, d\phi, \qquad \omega = d\theta/dt = -\theta_0 \operatorname{sen}\phi\, d\phi/dt$$

Remplazando estos valores en la expresión de ω e integrando, obtenemos:

$$t = \frac{1}{\sqrt{g/L}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 + \frac{1}{12}\theta_0^2(1 + \cos^2\phi)}}$$

Sea $k_1^2 = -\dfrac{g\theta_0^2}{12L}(g/L - g\theta_0^2/6L)$. Entonces,

$$\frac{g}{L}\left[1 + \frac{\theta_0^2}{12}(1 + \cos^2\phi)\right] = [g/L + (g/6L)(\theta_0)^2](1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\phi)$$

y
$$t = \frac{1}{\sqrt{g/L - g\theta_0^2/6L}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2\phi}}$$

Ahora, $\theta_0 = 90° = \pi/2$ y

$$t = \frac{1}{1{,}19\sqrt{g/L}} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - 0{,}386 \operatorname{sen}^2\phi}}$$

que es una integral elíptica incompleta de primer género. En consecuencia:

$$T = \frac{4}{1{,}19\sqrt{g/L}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 0{,}386 \operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{7{,}32}{\sqrt{g/L}} \text{ seg}$$

(c) Utilizando la forma exacta de la ecuación diferencial de movimiento se llega también a una expresión del período de oscilación en la forma de una integral elíptica de primer género:

$$t = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \dfrac{2g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

y
$$T = \frac{4}{\sqrt{g/L}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta_0/2)\operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{4}{\sqrt{g/L}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 0{,}49 \operatorname{sen}^2\theta}} = \frac{7{,}41}{\sqrt{g/L}} \text{ seg}$$

Observamos que los resultados obtenidos no son iguales. En realidad, el análisis de la parte (a) es exacto para amplitudes de oscilación menores de 20°. Para un ángulo de 160° el período es casi el doble que para una amplitud muy pequeña. Cuando la amplitud se aproxima a 180°, el período de oscilación se aproximará a infinito.

4. Un cilindro sólido homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar sobre un plano horizontal bajo la acción de un resorte lineal k que tiene una longitud libre L_o, como se muestra en la figura 6-4. Deducir la ecuación de movimiento según la primera aproximación no lineal.

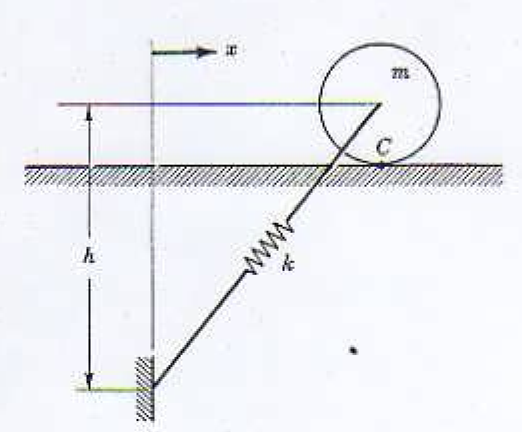


Fig. 6-4

En cualquier instante considerado, el cilindro está rotando alrededor del punto C, que es el punto de contacto o centro instantáneo de velocidad cero. Por tanto, la ecuación de movimiento es $\Sigma M = J_C\ddot{\theta}$, donde $J_C = J_0 + mr^2$ es el momento de inercia del cilindro con respecto al punto C. Así,

$$(\tfrac{1}{2}mr^2 + mr^2)\ddot{\theta} = -F_x r$$

donde F_x = componente horizontal de la fuerza del resorte.

De la geometría del sistema tenemos que el alargamiento del resorte es:

$$dL = \sqrt{h^2 + x^2} - L_0$$

y la componente horizontal de la fuerza del resorte es, por consiguiente,

$$F_x = [k(\sqrt{h^2+x^2} - L_0)]\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}.$$

Según la primera aproximación no lineal,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \frac{x}{h\sqrt{1+(x/h)^2}} = \frac{x}{h}[1 - \tfrac{1}{2}(x/h)^2 + \cdots]$$

y la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} + krx\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{h^2+x^2}}\right) = 0$$

Como no hay deslizamiento, $\theta = x/r$ y $\ddot{\theta} = \ddot{x}/r$; entonces,

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} + \left\{1 - \frac{L_0}{h}[1 - \tfrac{1}{2}(x/h)^2 + \cdots]\right\}kx = 0$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{3m}\left[\left(1 - \frac{L_0}{h}\right)x + \frac{L_0}{2h^3}x^3\right] = 0$$

que representa un sistema que tiene fuerza restauradora no lineal.

5. Un sistema mecánico que tiene una fuerza restauradora no lineal está accionado por una excitación $F_0 \cos \omega t$, como se representa en la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t$$

Determinar la vibración aproximada del estado estacionario.

La fuerza restauradora no lineal $\alpha x + \beta x^3$ se representa físicamente por un resorte cuya rigidez varía con el desplazamiento. Si β es positivo, la rigidez aumenta con el desplazamiento y el resorte se denomina *duro;* si β es negativo, la rigidez disminuye con el desplazamiento y se dice, entonces, que el resorte es *blando.*

Considerando únicamente valores pequeños de β y F_0 tenemos:

$$\ddot{x} = -\alpha x - \beta x^3 + F_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

Supongamos una primera aproximación de la solución del estado estacionario

$$x_1 = A \cos \omega t \qquad (2)$$

la ecuación de movimiento se convierte, entonces, en

$$\ddot{x}_2 = -\alpha A \cos \omega t - \beta A^3 \cos^3 \omega t + F_0 \cos \omega t \qquad (3)$$

Ahora,

$$\cos^3 \omega t = \tfrac{3}{4}\cos \omega t + \tfrac{1}{4}\cos 3\omega t \qquad (4)$$

y por tanto la ecuación (3) puede expresarse como:

$$\ddot{x}_2 = -(\alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3 - F_0)\cos \omega t - \tfrac{1}{4}\beta A^3 \cos 3\omega t \qquad (5)$$

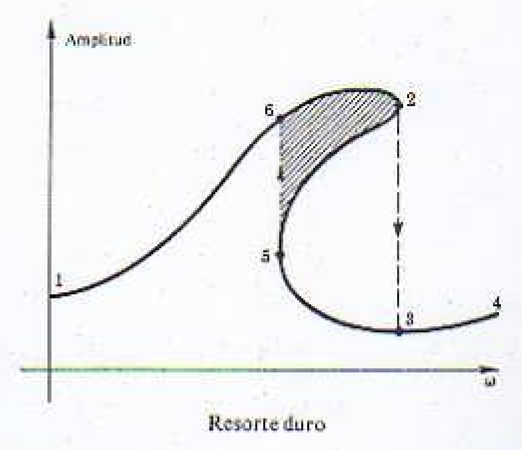
Integrando la ecuación (5) dos veces obtenemos:

$$x_2(t) = \frac{1}{\omega^2}(\alpha A + \tfrac{3}{4}\beta A^3 - F_0)\cos \omega t + \frac{\beta A^3}{36\omega^2}\cos 3\omega t$$

donde las constantes de integración se han tomado iguales a cero para garantizar que x_1 y x_2 son periódicos. Luego ésta es la segunda aproximación de la vibración del estado estacionario.

Como se dijo anteriormente, en los sistemas no lineales ocurren nuevos fenómenos que no se presentan en los sistemas lineales. Debe señalarse que en los sistemas con fuerza restauradora no lineal la resonancia no ocurre de la misma forma que en los sistemas con fuerza restauradora lineal. En los primeros, la amplitud de vibración nunca puede llegar a ser muy grande para una fuerza motriz de cualquier frecuencia dada. Esto se debe a que la frecuencia natural del sistema para pequeñas amplitudes de vibración es diferente de la frecuencia natural para grandes amplitudes de vibración. Puede demostrarse que para sistemas con resortes duros la frecuencia natural aumenta con la amplitud de vibración y sucede lo contrario para sistemas con resortes blandos.

Además, la amplitud de vibración puede aumentar o disminuir repentinamente cuando la frecuencia ω esté creciendo o disminuyendo. Esto se muestra en la figura 6-5.



Resorte duro

Resorte blando

Fig. 6-5

Para una magnitud constante de F_0, la amplitud de vibración aumentará a lo largo de los puntos 1, 2, 3 y 4, situados sobre la curva, cuando la frecuencia de excitación ω aumenta lentamente; obsérvese que la amplitud de vibración salta del punto 2 al punto 3. Cuando la frecuencia de excitación ω disminuye lentamente, la amplitud de vibración seguirá los puntos 4, 5, 6 y 1, dando un salto parecido al anterior, del punto 5 al punto 6. Esto se conoce como el *fenómeno del salto*.

Es claro que para una frecuencia de excitación dada existen dos valores diferentes de amplitud de vibración, como se puede observar en las regiones sombreadas de las curvas (es decir, la amplitud de vibración no es una función de la frecuencia de excitación y no tiene un valor único; este hecho es contrario a los sistemas lineales).

Así mismo, la vibración forzada de sistemas con fuerza restauradora no lineal, puede tener frecuencias menores que la frecuencia de excitación ω. Esto es conocido como *vibración subarmónica*. En los sistemas con fuerza restauradora lineal, las frecuencias de las vibraciones forzadas son siempre iguales a las frecuencias de excitación.

VIBRACION AUTOEXCITADA

6. Una viga uniforme de longitud 100 pul y área trasversal 0,1 pul^2 está pivotada en uno de sus extremos. Un peso de 10 lb se fija al otro extremo, el cual reposa sobre el cerco de una rueda que tiene 10 pul de radio y está rotando a una velocidad constante de 1200 rpm. Sea $(0{,}2 - 0{,}001v)$ el coeficiente de rozamiento entre la viga y la rueda, donde v es la velocidad relativa entre la viga y la rueda en la línea de contacto. Determinar la vibración del peso situado en el extremo de la viga. Tomar $E = 10(10)^6$ lb/pul^2 para el material de la viga.

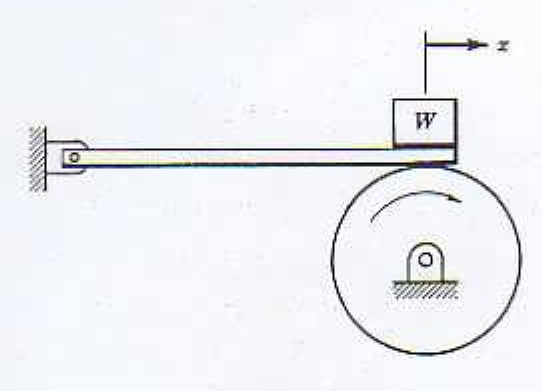


Fig. 6-6

Esta es una típica vibración autoexcitada debida a fricción seca entre superficies. La magnitud de la fuerza de fricción disminuye cuando la velocidad relativa aumenta, ocasionando un amortiguamiento negativo que sustenta la vibración del sistema.

La velocidad de un punto situado sobre el cerco de la rueda es $2\pi(10)(1200/60) = 1256$ pul/seg. En consecuencia la velocidad relativa en el punto de contacto es:

$$v = 1256 - \dot{x}$$

donde $\dot{x}$ es la velocidad del peso unido al extremo de la viga.

La fuerza de fricción que actúa sobre la viga es:

$$F = \mu N = 10[0{,}2 - 0{,}001(1256 - \dot{x})] = 0{,}01\dot{x} - 10{,}56$$

La fuerza restauradora está dada por la acción elástica de la viga, la cual actúa como un resorte lineal para pequeños alargamientos, es decir,

$$AE(x/L) = 0{,}1(10)(10)^6x/100 = 10.000x$$

Así, la ecuación de movimiento del peso W es:

$$(10/g)\ddot{x} + 10.000x = 0{,}01\dot{x} - 10{,}56$$

o

$$\ddot{x} - 0{,}386\dot{x} + 386.000x = -407$$

cuya solución es de la forma

$$x(t) = Ae^{-(c/2m)t}\,\text{sen}\,(\omega_d t - \phi) + B$$

donde $\omega_d = \sqrt{k/m - (c/2m)^2} = \sqrt{386.000 - 0{,}386^2/4} = 624$ y $B = -407/386.000 = -0{,}0011$.

Por tanto la vibración del peso W es

$$x(t) = Ae^{0{,}193t}\,\text{sen}\,(624t + \phi) - 0{,}0011$$

Se observa que la amplitud de vibración aumenta con el tiempo y otro tanto ocurre con la velocidad relativa del punto de contacto; en consecuencia la magnitud de la fuerza de fricción se reduce. Como resultado, la amplitud de vibración disminuirá, así como también la velocidad relativa del punto de contacto. Esto provocará un aumento en la magnitud de la fuerza de fricción y con el tiempo aumentará la amplitud de vibración. Este ciclo completo se repite.

ESTABILIDAD

7. Un sistema simple masa-resorte, con amortiguamiento, es excitado por medio de una fuerza que es proporcional a la velocidad de la masa m. Estudiar la estabilidad del sistema.

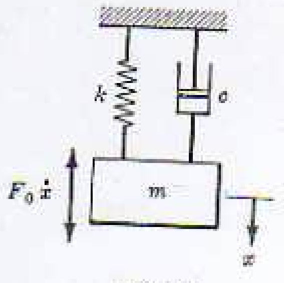


Fig. 6-7

Aplicando $\Sigma F = ma$, la ecuación diferencial de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0\dot{x}$$

Cambiando el orden,

$$m\ddot{x} + kx = (F_0 - c)\dot{x} \qquad (1)$$

$$\qquad (2)$$

La ecuación (2) también puede expresarse como:

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2) = (F_0 - c)\dot{x}^2 \qquad (3)$$

donde el miembro de la izquierda es la rata de cambio de la energía total del sistema (es decir, la energía cinética de la masa m más la energía potencial del resorte).

Si $F_0 < c$, la rata de cambio de la energía total es negativa. Esto significa que la cantidad de energía que posee el sistema está disminuyendo debido a la presencia de amortiguamiento, representado aquí por el amortiguador c. Por consiguiente, el sistema está oscilando con amplitud decreciente. El sistema es estable.

Si $F_0 > c$, tenemos amortiguamiento negativo y la rata de cambio de energía es positiva. Esto significa que la cantidad de energía que posee el sistema está aumentando. Como resultado, el propio movimiento del sistema tiende a aumentar la energía o la amplitud de vibración de sí mismo. Por consiguiente, el sistema es inestable.

La ecuación (2) también puede escribirse como:

$$\ddot{x} + \frac{(c - F_0)}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (4)$$

Haciendo $x = e^{rt}$ en la ecuación (4) obtenemos la ecuación característica del sistema

$$r^2 + \frac{(c - F_0)}{m}r + \frac{k}{m} = 0 \qquad (5)$$

y

$$r_{1,2} = -\frac{(c - F_0)}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left[\frac{(c - F_0)}{2m}\right]^2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. En consecuencia,

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t}\,\text{sen}\,(\sqrt{1 - \zeta^2}\,\omega_n t + \phi)$$

donde $\zeta = (c - F_0)/2m\omega_n$ es el factor de amortiguamiento.

Si $F_0 > c$, el amortiguamiento presente en el sistema es negativo y ζ es negativo. El movimiento del sistema, $x(t)$, aumentará ilimitadamente y el sistema es inestable.

8. Un sistema simple masa-resorte con amortiguamiento es accionado por una fuerza que es proporcional al desplazamiento de la masa m. Estudiar la estabilidad del sistema.

Utilizando $\Sigma F = ma$, la ecuación diferencial de movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 x \qquad (1)$$

y cambiando el orden

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k - F_0}{m}x = 0 \qquad (2)$$

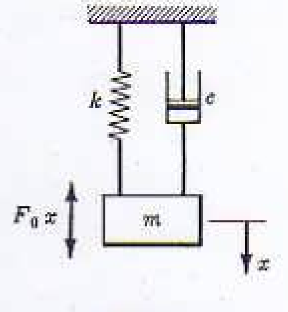


Fig. 6-8

Haciendo $x = e^{rt}$ en la ecuación (2) obtenemos la ecuación característica del sistema

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k - F_0}{m} = 0 \qquad (3)$$

y

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k - F_0}{m}} \qquad (4)$$

Así,



$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad (5)$$

donde A y B son constantes arbitrarias que deben ser evaluadas de las condiciones iniciales del problema y r_1 y r_2 están dadas por (4).

Cuando $F_0 > k$, r_1 es positivo y r_2 es negativo, de modo que

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{-r_2 t} \qquad (6)$$

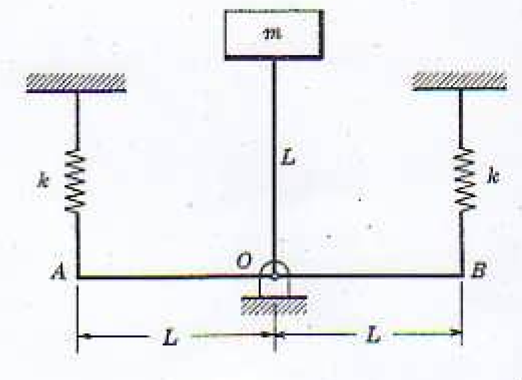
donde la magnitud del primer término aumenta con el tiempo y la del segundo disminuye. Por consiguiente, el movimiento del sistema es divergente e inestable.

La frecuencia amortiguada es

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k - F_0}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

y si F_0 es mayor que k, la cantidad que está bajo el radical es negativa y el movimiento del sistema no es oscilatorio.

9. Una masa m está fijada a un extremo de una varilla rígida sin peso, la cual a su vez está unida a otra varilla AB. La varilla AB está pivotada en su punto medio y en sus extremos tiene dos resortes de rigidez k, como se muestra en la figura 6-9. Estudiar la estabilidad del sistema, si el movimiento está restringido al plano del papel.



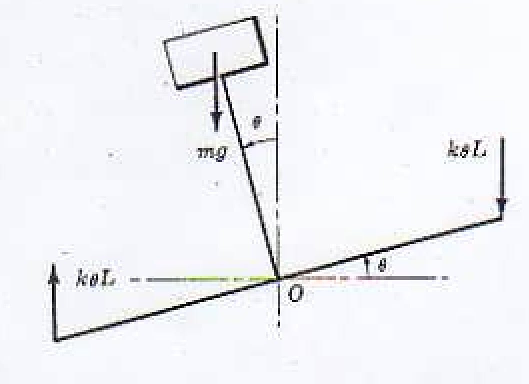


Fig. 6-9

La ecuación diferencial de movimiento está dada por $\Sigma T_0 = I\ddot{\theta}$:

$$mL^2\ddot{\theta} = mgL \operatorname{sen}\theta - 2k\theta L^2 \cos\theta$$

o

$$\ddot{\theta}L - g \operatorname{sen}\theta + 2kL\theta \cos\theta/m = 0$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Suponiendo que los ángulos de oscilación son pequeños, podemos hacer $\operatorname{sen}\theta \doteq \theta$ y $\cos\theta \doteq 1$ y la ecuación de movimiento será

$$L\ddot{\theta} + (2kL/m - g)\theta = 0 \qquad \text{y así} \qquad \omega_n = \sqrt{2k/m - g/L} \text{ rad/seg}$$

Si $g < 2kL/m$, ω_n es positivo. En esta posición el sistema es estable, es decir que $\theta(t) = A\cos\omega_n t + B\operatorname{sen}\omega_n t$.
Si $g > 2kL/m$, ω_n es negativo. En esta posición el sistema es inestable, es decir que $\theta(t) = C\cosh\omega_n t + D\operatorname{senh}\omega_n t$.

Vamos a probar la estabilidad del sistema por medio del principio de la energía potencial mínima. La energía potencial del sistema es

$$\text{E.P.} = kL^2\theta^2 - mgL(1-\cos\theta)$$

donde $kL^2\theta^2$ es la energía de los resortes y $mgL(1-\cos\theta)$ es la pérdida de energía debida a la posición de la masa m. Ahora,

$$\frac{d(\text{E.P.})}{d\theta} = 2kL^2\theta - mgL\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d^2(\text{E.P.})}{d\theta^2} = 2kL^2 - mgL\cos\theta$$

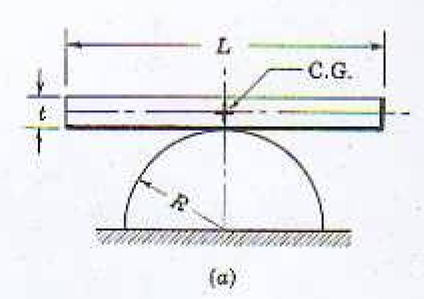
De este modo,

$$\left.\frac{d(\text{E.P.})}{d\theta}\right]_{\theta=0} = 0$$

y para $\left.\frac{d^2(\text{E.P.})}{d\theta^2}\right]_{\theta=0} > 0$ tenemos que $2kL^2 > mgL$, o sea que $2kL/m > g$.

Por tanto, la posición de equilibrio $\theta = 0$ será estable si $2kL/m > g$, o sea si $k > mg/2L$.

10. Un tablón de madera de longitud L, espesor t y peso W está balanceado sobre un cilindro semicircular de radio R, como se muestra en la figura 6-10(a). Si el tablón se inclina ligeramente, ¿cuál será la condición para que haya equilibrio estable en esta posición?



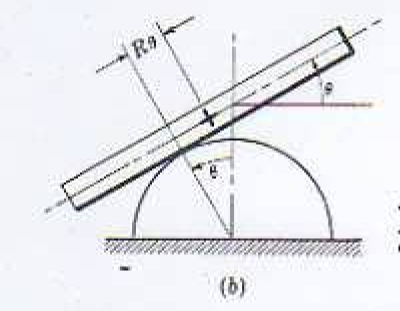


Fig. 6-10

Supongamos que el tablón oscila sin deslizar sobre el cilindro, cuando se ha inclinado ligeramente. Vamos a probar la estabilidad de esta posición del tablón utilizando el principio de la energía potencial mínima.

En la posición desplazada del tablón, que se muestra en la figura 6-10(b), la energía potencial del sistema se debe únicamente a la localización del centro de gravedad del tablón. Así,

$$\text{E.P.} = W[(R + t/2)\cos\theta + R\theta\operatorname{sen}\theta]$$

y la primera y segunda derivadas de E.P. con respecto a θ son

$$(1) \qquad \frac{d(\text{E.P.})}{d\theta} = W[-R\operatorname{sen}\theta - (t/2)\operatorname{sen}\theta + R\operatorname{sen}\theta + R\theta\cos\theta]$$

$$(2) \qquad \frac{d^2(\text{E.P.})}{d\theta^2} = W[-(t/2)\cos\theta + R\cos\theta - R\theta\operatorname{sen}\theta]$$

Empleando el principio de la energía potencial mínima, la parte superior del cilindro será una posición de equilibrio estable si

$$\frac{d(\text{E.P.})}{d\theta} = 0, \qquad \frac{d^2(\text{E.P.})}{d\theta^2} > 0 \qquad \text{en } \theta = 0$$

De (1) tenemos que $d(\text{E.P.})/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0$; por tanto $\theta = 0$ es una posición de equilibrio.

De (2) obtenemos $d^2(\text{E.P.})/d\theta^2 > 0$ en $\theta = 0$ cuando $R > t/2$; en consecuencia la condición de equilibrio estable del tablón en $\theta = 0$ es $R > t/2$.

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Problemas propuestos

11. En la figura 6-11 se muestra una masa m que desliza sobre un plano horizontal liso entre dos resortes lineales que tienen una rigidez k_1 y k_2, respectivamente. Los resortes no soportan ningún esfuerzo cuando la masa está en la posición de equilibrio. Encontrar la frecuencia natural.

Resp. $\omega_n = \dfrac{\sqrt{k_1 k_2}}{\sqrt{m}\,[\sqrt{k_2}+\sqrt{k_1}\,]}$ rad/seg

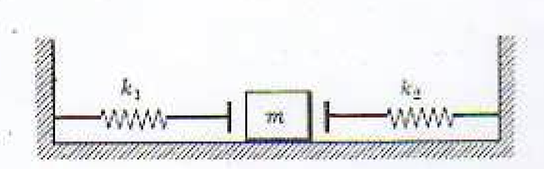


Fig. 6-11

Fig. 6-12

12. Demostrar que el principio de la superposición no es válido para una ecuación diferencial semejante a la siguiente:

$$\ddot{x} + \beta x^2 = 0$$

13. Un tablón homogéneo de madera de longitud L y espesor t reposa sobre un soporte semi-circular de radio R, como se muestra en la figura 6-12. Si el tablón se inclina ligeramente oscilará sin deslizar sobre el soporte. Encontrar la ecuación de movimiento y demostrar que no es lineal.

Resp. $\ddot{\theta}[(R\theta)^2 + (t/2)^2 + (t^2+L^2)/12] + [(R\dot{\theta})^2 + Rg\cos\theta]\theta - \frac{3}{2}g\,\text{sen}\,\theta = 0$

14. Determinar el período de oscilación de la ecuación de movimiento no lineal $\ddot{x} + x^3 = 0$, con las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. *Resp.* $T = 7{,}42$ seg

15. Demostrar que el período T de un péndulo simple se aproxima a infinito cuando el ángulo inicial θ_0 se aproxima a 180°.

16. Una varilla delgada y homogénea de longitud L está pinada en un extremo, de suerte que puede girar libremente en un plano vertical, como se muestra en la figura 6-13. Si la varilla se suelta en la posición horizontal, calcular la velocidad angular de ésta cuando pase por la posición vertical y el tiempo requerido para llegar a esta posición.

Resp. $\omega = \sqrt{3g/L}$ rad/seg, tiempo requerido $= 1{,}52\sqrt{L/g}$ seg

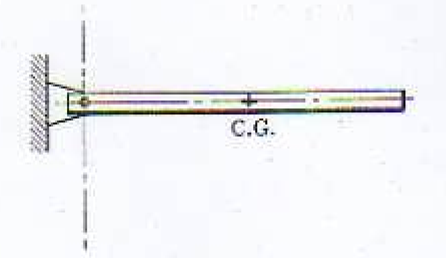


Fig. 6-13

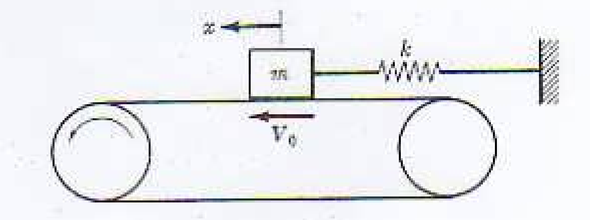


Fig. 6-14

17. Determinar la primera aproximación $x_1(t)$ a la solución de la siguiente ecuación:

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^5 = \beta F_0 \cos\omega t$$

¿Cuál es la relación frecuencia-amplitud?

Resp. $x_1(t) = A\cos\omega t + \dfrac{5\beta A^5}{128\omega^2}\cos 3\omega t + \dfrac{\beta A^5}{384\omega^2}\cos 5\omega t$

$$\omega^2 = \alpha + \frac{5}{8}\beta A^4 - \frac{\beta F_0}{A}$$

18. Una masa m reposa sobre una banda trasportadora que se mueve a una velocidad constante V_0, como se muestra en la figura 6-14. Si el coeficiente de rozamiento entre las superficies en contacto disminuye ligeramente cuando aumenta la velocidad relativa entre las superficies, demostrar que a partir de la posición de reposo se desarrolla una vibración en la masa m, bajo la más mínima perturbación.

19. Demostrar que la vibración autoexcitada de la masa m del sistema que se muestra en la figura 6-15, es inestable.

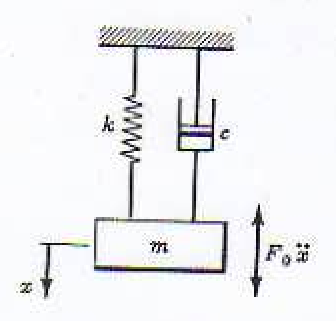


Fig. 6-15



Fig. 6-16

20. Probar la estabilidad de los sistemas cuyas ecuaciones características son
(a) $r^2 - 4r + 5 = 0$, (b) $r^3 + 5r^2 + 3r + 2 = 0$
Resp. (a) Inestable, (b) Estable

21. Utilizando el principio de la energía potencial mínima, demostrar para el péndulo simple que se muestra en la figura 6-16, que la posición $\theta = \pi$ es inestable y la posición $\theta = 0$ es estable.

22. Una varilla rígida uniforme de longitud L y peso W está pivotada en un extremo y tiene unido al otro extremo un resorte de constante k, como se muestra en la figura 6-17. Encontrar la condición de estabilidad del sistema.
Resp. $kL^2 > WL/2$

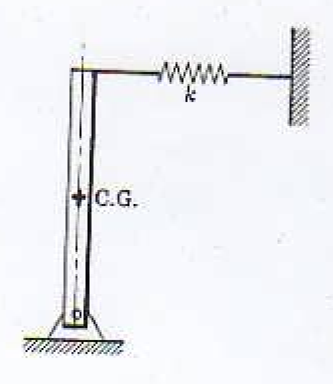


Fig. 6-17

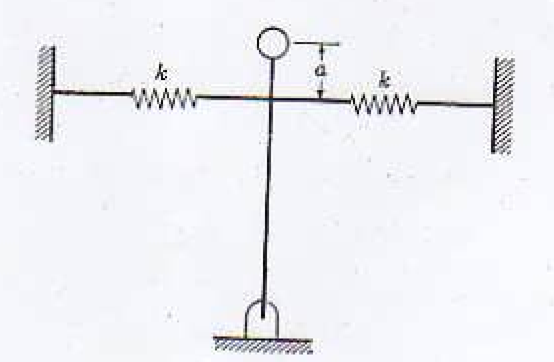


Fig. 6-18

23. Un péndulo invertido de longitud L y masa m tiene unidos a él dos resortes de rigidez k, como se muestra en la figura 6-18. Estudiar la estabilidad del sistema.

Resp. El sistema es estable si $\frac{2k}{m}\left(1 - \frac{a}{L}\right) > (g/L)$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

Capítulo 7

Analogías eléctricas

INTRODUCCION

Los sistemas mecánicos pueden representarse y estudiarse por medio de sus circuitos eléctricos equivalentes, los cuales se construyen más fácilmente que los modelos de los correspondientes sistemas mecánicos; de aquí que sea más conveniente tomar los resultados experimentales de los circuitos eléctricos equivalentes, que de los propios modelos mecánicos.

Los circuitos eléctricos equivalentes se obtienen comparando las ecuaciones de movimiento de los dos sistemas. Un sistema mecánico y uno eléctrico son análogos si sus ecuaciones diferenciales de movimiento son matemáticamente iguales. Cuando esto ocurre, los términos correspondientes de las dos ecuaciones diferenciales de movimiento también son análogos. Los circuitos eléctricos equivalentes se pueden construir utilizando las leyes de Kirchhoff.

LEYES DE KIRCHHOFF

Ley de la tensión de Kirchhoff: En cualquier red, la suma algebraica de todas las tensiones alrededor de un circuito cerrado cualquiera, es igual a cero.

Ley de la corriente de Kirchhoff: En cualquier circuito, la suma algebraica de las intensidades de las corrientes alrededor de un nudo cualquiera, es igual a cero.

ANALOGIAS ELECTRICAS

Existen dos analogías eléctricas para los sistemas mecánicos: (1) analogía *tensión-fuerza* o analogía *masa-inductancia* y (2) analogía *corriente-fuerza* o analogía *masa-capacitancia*. En muchos sistemas la analogía tensión-masa es la más útil, pero en sistemas complicados es difícil de utilizar. La analogía corriente-fuerza es más una analogía física que una analogía debida a la presencia de ecuaciones de movimiento similares y es fácil de aplicar. Tiene la ventaja de que el circuito eléctrico y el circuito mecánico son de la misma forma. La siguiente tabla muestra las dos analogías, tensión-fuerza y corriente-fuerza, para sistemas mecánicos.

Tabla 7-1

Sistema mecánico		Sistema eléctrico			
		Analogía tensión-fuerza		Analogía corriente-fuerza	
	Principio de D'Alembert		Ley de la tensión de Kirchhoff		Ley de la corriente de Kirchhoff
	Grado de libertad		Malla		Nudo
	Fuerza aplicada		Interruptor cerrado		Interruptor cerrado
F	Fuerza (lb)	v	Tensión (volt)	i	Corriente (amp)
m	Masa (lb-seg²/pul)	L	Inductancia (henrio)	C	Capacitancia (faradio)
x	Desplazamiento (pul)	q	Carga (culombio)		$\phi = \int v\,dt$
$\dot{x}$	Velocidad (pul/seg)	i	Corriente en una malla (amp)	v	Tensión en un nudo (volt)
c	Amortiguamiento (lb-seg/pul)	R	Resistencia (ohmio)	$1/R$	Conductancia (mho)
k	Elasticidad (lb/pul)	$1/C$	1/Capacitancia	$1/L$	1/Inductancia
	Elemento de acoplamiento		Elemento común a dos mallas		Elemento entre dos nudos

En general, para establecer los circuitos eléctricos equivalentes de sistemas mecánicos se observa la siguiente regla: si las fuerzas actúan en serie en el sistema mecánico, los elementos eléctricos que representan estas fuerzas son puestos en paralelo y si las fuerzas están en paralelo se representan por elementos colocados en serie, en los circuitos eléctricos.

NUMEROS ADIMENSIONALES

Con el fin de que el sistema análogo eléctrico sea completamente equivalente al sistema mecánico en cuestión, se emplea el análisis dimensional para obtener los factores de escala correctos, tales que hagan los dos sistemas idénticos. Los siguientes números adimensionales pueden obtenerse del análisis dimensional:

$$m_1/m_2 = L_1/L_2, \quad k_1/k_2 = C_2/C_1, \quad \omega\sqrt{m/k} = \omega_e\sqrt{LC}, \quad F/kx = vC/q, \quad c^2/km = R^2C/L$$

Problemas resueltos

1. Estudiar los términos eléctricos análogos del sistema vibratorio de un solo grado de libertad que se muestra en la figura 7-1(*a*).

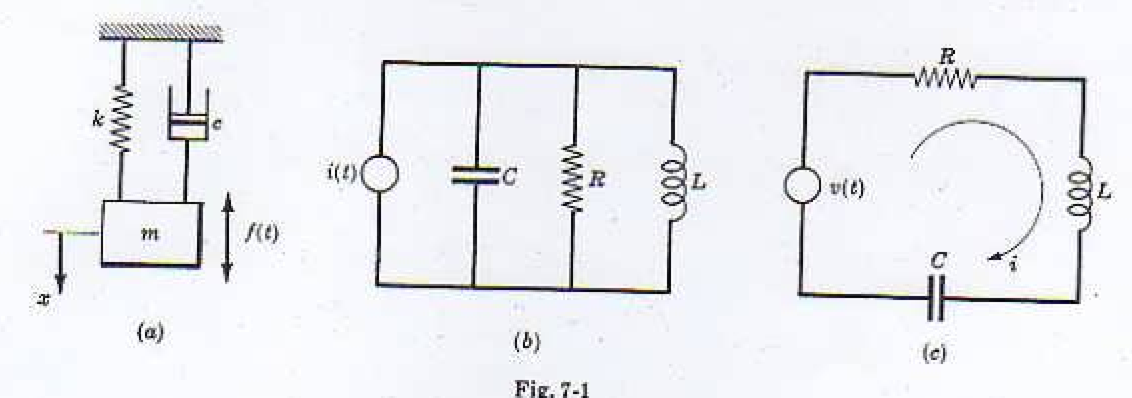


Fig. 7-1

Empleando la ley del movimiento de Newton, la ecuación diferencial de movimiento es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \tag{1}$$

Para la red eléctrica que se muestra en la figura 7-1(*b*), se puede escribir una ecuación en la siguiente forma:

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = \frac{di(t)}{dt} \tag{2}$$

donde C = capacitancia; $\left(i = C\frac{dv}{dt}\right)$,
R = resistencia; $(i = v/R)$,
L = inductancia; $\left[i = \frac{1}{L}\int v\,dt + i(0)\right]$,
$i(t)$ = fuente de corriente;
v = tensión.

Como las ecuaciones (*1*) y (*2*) son de la misma forma, es decir, que son matemáticamente idénticas, los dos sistemas representados por estas ecuaciones son análogos.

Utilizando la *ley de la tensión de Kirchhoff*, la ecuación de tensión de la red eléctrica que se muestra en la figura 7-1(*c*) es

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = v(t) \tag{3}$$

Podemos expresar la ecuación (1) como:

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} + c\dot{x} + k\int \dot{x}\,dt \;=\; f(t) \tag{4}$$

donde dx/dt se ha remplazado por $\dot{x}$ y x por $\int \dot{x}\,dt$. Ahora las ecuaciones (3) y (4) son de la misma forma, lo cual significa que los sistemas representados por estas dos ecuaciones son análogos. En otras palabras, la tensión de excitación $v(t)$ es análoga a la fuente de excitación $f(t)$, la corriente en la malla, i, es análoga a la velocidad de la masa, $\dot{x}$, y así sucesivamente. Esta se conoce como *analogía masa-inductancia* o *analogía tensión-fuerza*.

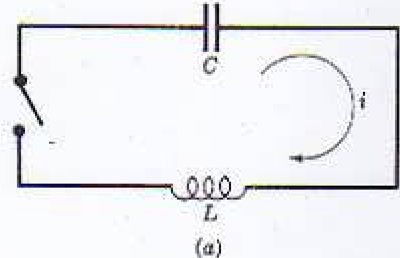
Integrando una vez la ecuación (2) con respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de corriente de la red que se muestra en la figura 7-1(*b*).

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int v\,dt \;=\; i(t) \tag{5}$$

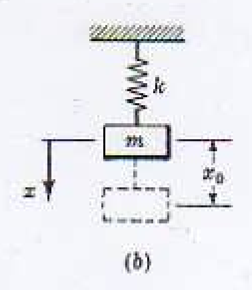
(La ecuación (5) también se puede obtener por la ley de la corriente de Kirchhoff.)

Las ecuaciones (4) y (5) son de la misma forma, lo cual significa que los sistemas representados por estas dos ecuaciones son análogos. Por tanto, la corriente de excitación $i(t)$ es análoga a la fuerza de excitación $f(t)$, la tensión en la malla, v, es análoga a la velocidad de la masa, $\dot{x}$, y así sucesivamente. Esta se conoce como *analogía masa-capacitancia* o *analogía corriente-fuerza*.

2. Un circuito eléctrico consta de un condensador C, un inductor L y un interruptor dispuestos en serie, como se muestra en la figura 7-2(*a*). El condensador tiene inicialmente una carga q_0 y el interruptor se abre en un tiempo $t < 0$. Si el interruptor se cierra en $t = 0$, encontrar la subsiguiente carga sobre el condensador.



(*a*)



(*b*)

Fig. 7-2

Empleando la ley de la tensión de Kirchhoff, tenemos:

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} \;=\; 0 \tag{1}$$

donde q es la carga sobre el condensador C. Puesto que $dq/dt = i$, la ecuación (1) queda

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} \;=\; 0 \tag{2}$$

o

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} \;=\; 0 \tag{3}$$

Por tanto

$$q(t) \;=\; A \operatorname{sen}\sqrt{1/LC}\,t + B\cos\sqrt{1/LC}\,t \tag{4}$$

En $t = 0$, $q = q_0$ y así $B = q_0$. En $t = 0$, $\dot{q} = i = 0$ y por tanto $A = 0$. Entonces

$$q(t) \;=\; q_0\cos\sqrt{1/LC}\,t \;=\; q_0\cos\omega_n t \tag{5}$$

donde $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$ es la frecuencia natural del sistema.

Comparemos este circuito eléctrico con un sistema simple masa-resorte de un solo grado de libertad, como el que se muestra en la figura 7-2(*b*). La ecuación de movimiento de este sistema mecánico es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx \;=\; 0$$

cuya solución es

$$x(t) \;=\; x_0\cos\sqrt{k/m}\,t \;=\; x_0\cos\omega_n t$$

donde x_0 es el desplazamiento inicial de la masa m a partir de la posición de equilibrio estático.

Por consiguiente los dos sistemas son análogos, con L correspondiendo a m, q a x, $1/C$ a k y

$$\omega_n = 1/\sqrt{LC} \quad \text{a} \quad \omega_n = \sqrt{k/m}.$$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

3. En la figura 7-3(*a*) se muestra un sistema masa-resorte de dos grados de libertad. Utilizar las analogías tensión-fuerza y corriente-fuerza para establecer los circuitos eléctricos equivalentes a este sistema.

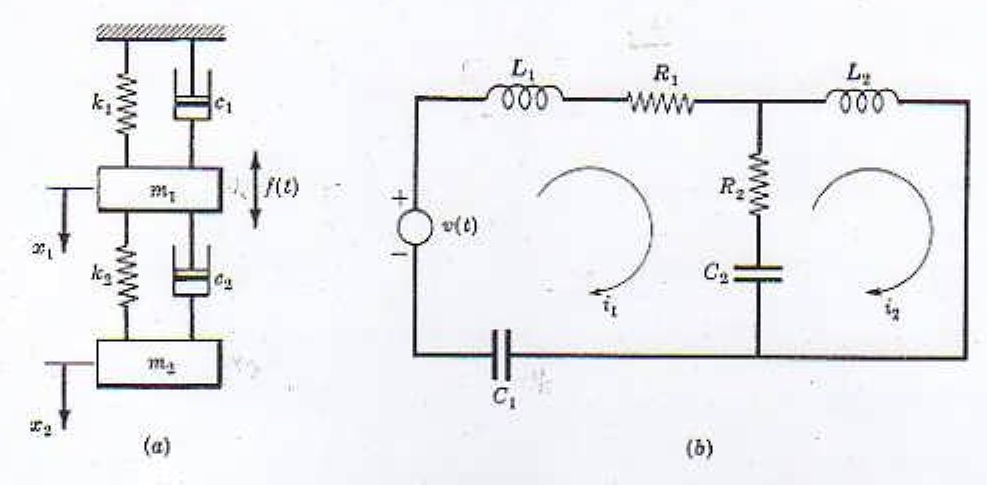


Fig. 7-3

Las ecuaciones de movimiento, dadas por $\Sigma F = ma$, son

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + (c_1 + c_2)\frac{dx_1}{dt} + (k_1 + k_2)x_1 - c_2\frac{dx_2}{dt} - k_2x_2 = f(t)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + c_2\frac{dx_2}{dt} + k_2x_2 - c_2\frac{dx_1}{dt} - k_2x_1 = 0$$

Utilizando la analogía tensión-fuerza que se da en la tabla 7-1, las ecuaciones eléctricas análogas son

$$L_1\frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2)i_1 + \left[\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right]\int i_1\,dt - R_2i_2 - \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = v(t)$$

$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2i_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt - R_2i_1 - \frac{1}{C_2}\int i_1\,dt = 0$$

y el circuito eléctrico análogo es el que se muestra en la figura 7-3(*b*).

Utilizando la analogía corriente-fuerza que se muestra en la tabla 7-1, las ecuaciones eléctricas análogas son

$$C_1\frac{dv_1}{dt} + \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]v_1 + \left[\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right]\int v_1\,dt - \frac{v_2}{R_2} - \frac{1}{L_2}\int v_2\,dt = i(t)$$

$$C_2\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{1}{L_2}\int v_2\,dt - \frac{v_1}{R_2} - \frac{1}{L_2}\int v_1\,dt = 0$$

y el circuito eléctrico análogo es el que se muestra en la figura 7-3(*c*).

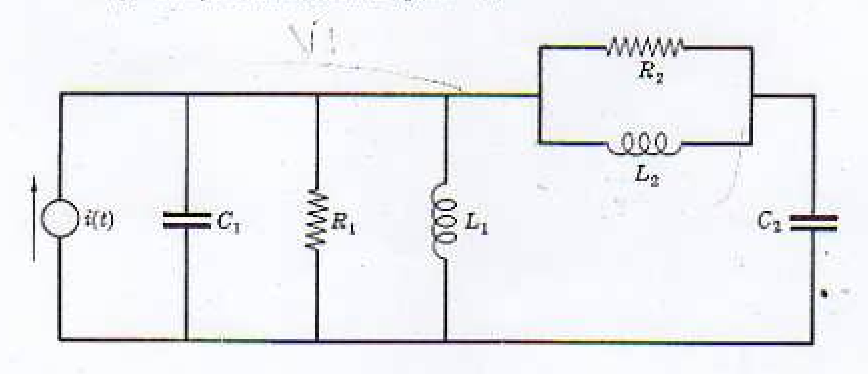
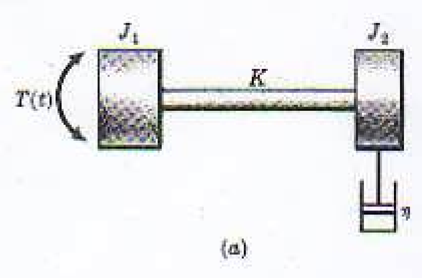


Fig. 7-3(*c*)

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

4. En la figura 7-4(*a*) se muestra un sistema simple de momento torsional con amortiguamiento. Utilizando la analogía tensión-momento torsional, dibujar el diagrama de los términos eléctricos análogos a los de este sistema.



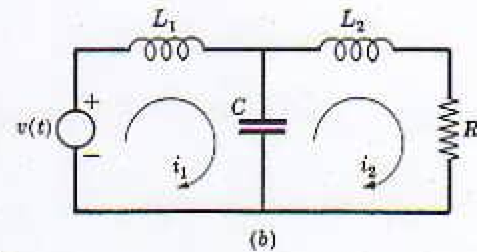


Fig. 7-4

Las ecuaciones diferenciales de movimiento son

$$J_1\ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) = T(t)$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + \eta\dot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

donde θ_1 y θ_2 son los desplazamientos angulares de los rotores J_1 y J_2, respectivamente, y η es el coeficiente de amortiguamiento.

La analogía tensión-momento torsional es una extensión de la analogía tensión-fuerza que se puede hacer debido a que hay una completa analogía entre los sistemas lineal y rotacional. Remplazando la fuerza por el momento torsional, el desplazamiento lineal por el desplazamiento angular, y así sucesivamente, las ecuaciones de los términos análogos a los del sistema de momento torsional son

$$L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C}\int (i_1 - i_2)\,dt = v(t)$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C}\int (i_2 - i_1)\,dt = 0$$

y el correspondiente diagrama de términos eléctricos análogos es el que se muestra en la figura 7-4(*b*).

5. Un sistema mecánico está representado por las siguientes ecuaciones:

$$A\ddot{\theta}_1 + B\dot{\theta}_1 + D\theta_1 - E\ddot{\theta}_2 = 0$$
$$a\ddot{\theta}_2 + b\dot{\theta}_2 + d\theta_2 - e\ddot{\theta}_1 = 0$$

Determinar el circuito de los términos análogos a los del sistema dado.

Las ecuaciones de movimiento dadas, también pueden escribirse como:

$$A\ddot{\theta}_1 + B\dot{\theta}_1 + D\theta_1 = E\ddot{\theta}_2 \qquad (1)$$
$$a\ddot{\theta}_2 + b\dot{\theta}_2 + d\theta_2 = e\ddot{\theta}_1 \qquad (2)$$

Las correspondientes ecuaciones eléctricas análogas son

$$L_1\frac{di}{dt} + R_1 i + \frac{1}{C_1}\int i\,dt = v(t) \qquad (3)$$
$$C_2\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_2} + \frac{1}{L_2}\int v\,dt = i(t) \qquad (4)$$

La ecuación (*3*) se obtiene utilizando la analogía tensión-fuerza y la (*4*) de la analogía corriente-fuerza.

En la figura 7-5(*a*) se muestran las redes eléctricas correspondientes a las ecuaciones (*3*) y (*4*), las cuales se pueden reunir en una sola malla, como se muestra en la figura 7-5(*b*).

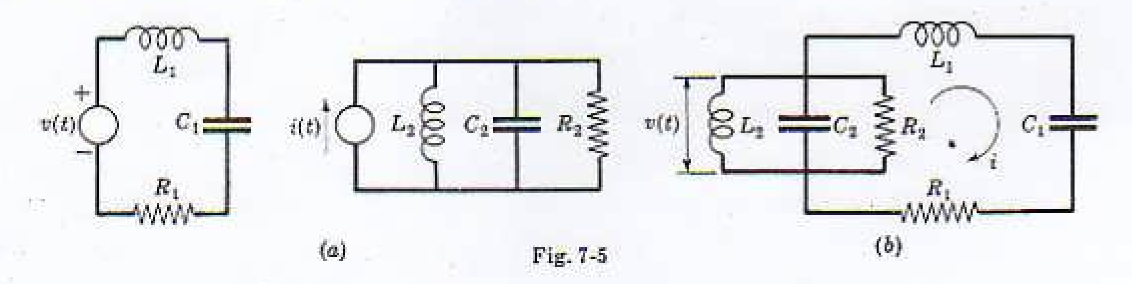


Fig. 7-5

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

6. Utilizando las analogías tensión-fuerza y corriente-fuerza, dibujar los términos eléctricos análogos a los del sistema mecánico que se muestra en la figura 7-6(a) y de ellos deducir las ecuaciones diferenciales de movimiento.

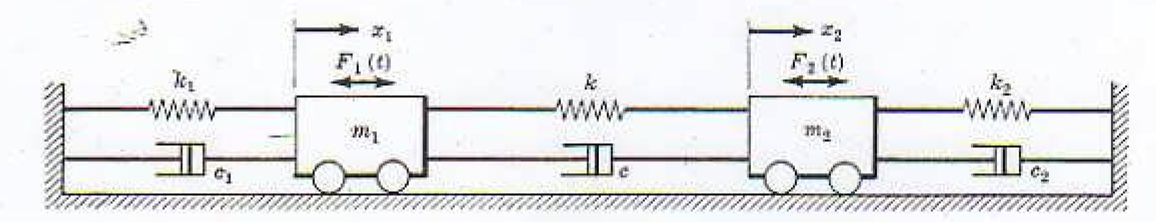
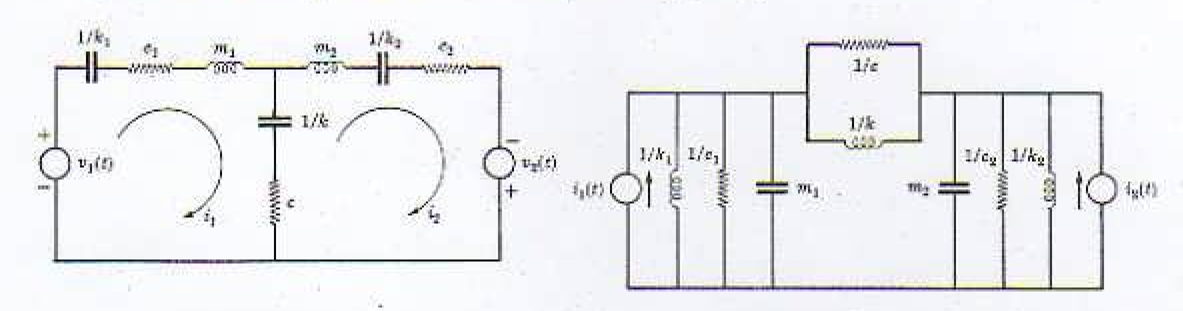


Fig. 7-6(a)

Los circuitos eléctricos equivalentes se dan en las figuras 7-6(b) y 7-6(c).



Analogía tensión-fuerza

Fig. 7-6(b)

Analogía corriente-fuerza

Fig. 7-6(c)

Por tanto las ecuaciones diferenciales de movimiento son

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k(x_1 - x_2) + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_1(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + k(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = F_2(t)$$

7. Estudiar el comportamiento del sistema que se muestra en la figura 7-7(a) por medio de sus términos eléctricos análogos. Los elementos mecánicos son: $k = 50$ lb/pul, $c = 0.1$ lb-seg/pul, $m = 0.05$ lb-seg^2/pul, $F_0 = 5$ lb y $\omega = 10$ rad/seg. Se dispone de una inductancia L de 0,1 henrios y una fuente de tensión alterna de frecuencia 100 rad/seg.

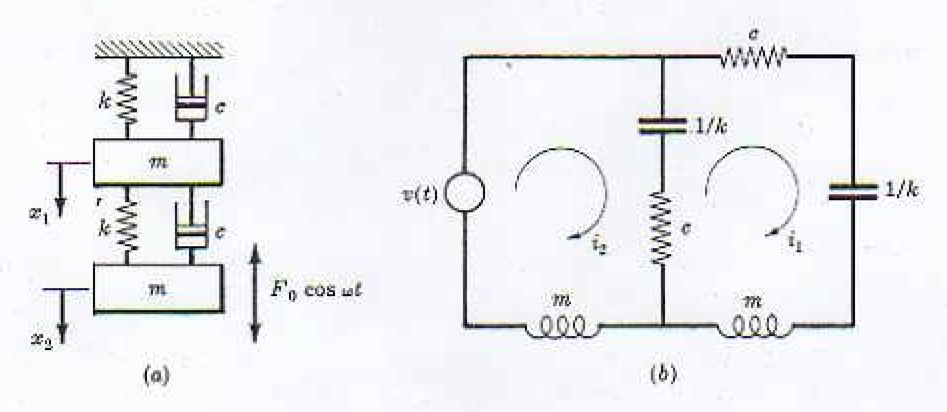


Fig. 7-7

En la figura 7-7(b) se muestran los términos eléctricos análogos a los del sistema mecánico, con base en la analogía tensión-fuerza.

Del análisis dimensional tenemos las siguientes relaciones entre el sistema mecánico y su sistema eléctrico análogo.

$$\omega\sqrt{m/k} = \omega_e\sqrt{LC} \quad (1)$$
$$c^2/km = R^2C/L \quad (2)$$
$$F/kx = vC/q \quad (3)$$

Utilizando (1) obtenemos:

$$10\sqrt{0{,}05/50} = 100\sqrt{0{,}1C} \quad \text{o} \quad C = 100 \text{ microfaradios}$$

De (2),

$$c^2/km = 0{,}1^2/(50)(0{,}05) = 100(10)^{-6}R^2/0{,}1 \quad \text{o} \quad R = 2 \text{ ohmios}$$

y de (3),

$$F/kx = 5/50x = vC/q \quad \text{o} \quad x = (0{,}1/v)(q/C)$$

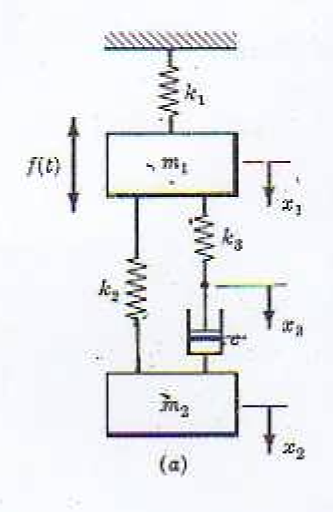
donde v es la tensión impresa. Ahora bien, la expresión de x se puede escribir

$$x(t) = (0{,}1/v)v_c$$

donde v_c es la caída de tensión en el condensador C.

Es claro que los desplazamientos de las masas del sistema mecánico considerado se pueden obtener cualitativa y cuantitativamente midiendo las caídas de tensión en los correspondientes condensadores. Por consiguiente se puede estudiar conveniente y cuidadosamente el comportamiento de un sistema mecánico complejo por medio de sus términos eléctricos análogos, los cuales son baratos, fáciles de cambiar y fáciles de obtener.

8. En la figura 7-8(*a*) se muestra un sistema masa-resorte de tres grados de libertad. Utilizar la analogía tensión-fuerza para obtener la red de los términos eléctricos análogos.



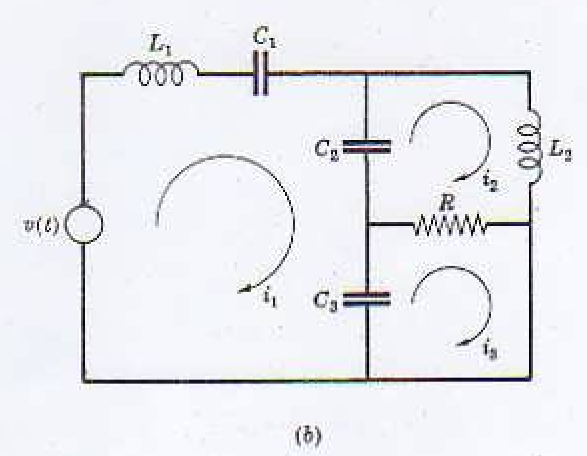


Fig. 7-8

Las ecuaciones diferenciales de movimiento son

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + k_3(x_1 - x_3) = f(t)$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = 0$$
$$k_3(x_3 - x_1) = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)$$

Utilizando la analogía tensión-fuerza obtenemos las ecuaciones eléctricas análogas

$$L_1\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1}\int i_1\,dt + \frac{1}{C_2}\int (i_1 - i_2)\,dt + \frac{1}{C_3}\int (i_1 - i_3)\,dt = v(t)$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} + (i_2 - i_3)R + \frac{1}{C_2}\int (i_2 - i_1)\,dt = 0$$
$$R(i_3 - i_2) + \frac{1}{C_3}\int (i_3 - i_1)\,dt = 0$$

y la correspondiente red de términos eléctricos análogos es la que se muestra en la figura 7-8(*b*).

9. Utilizando la analogía tensión-fuerza, establecer el circuito eléctrico análogo al sistema vibratorio torsional que se muestra en la figura 7-9(*a*).

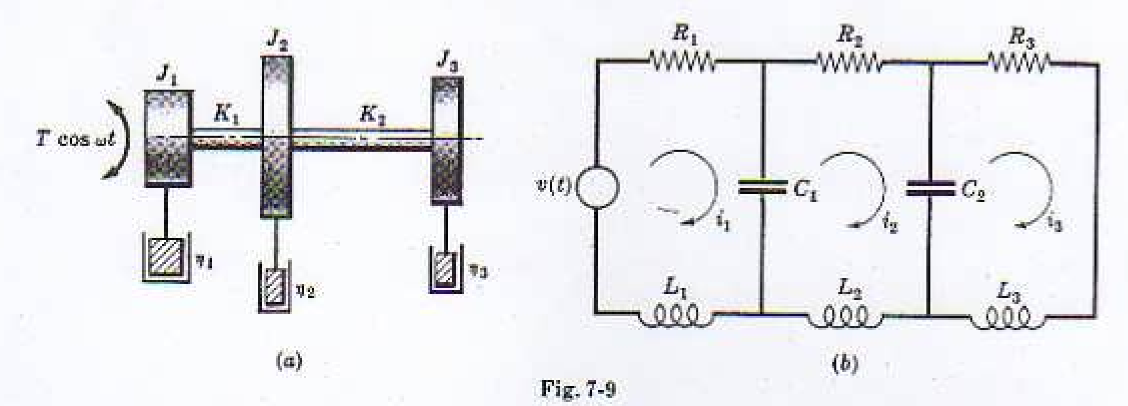


Fig. 7-9

Las ecuaciones diferenciales de movimiento son

$$J_1\ddot{\theta}_1 + \eta_1\dot{\theta}_1 + K_1(\theta_1 - \theta_2) = T\cos\omega t$$
$$J_2\ddot{\theta}_2 + \eta_2\dot{\theta}_2 + K_1(\theta_2 - \theta_1) + K_2(\theta_2 - \theta_3) = 0$$
$$J_3\ddot{\theta}_3 + \eta_3\dot{\theta}_3 + K_2(\theta_3 - \theta_2) = 0$$

donde las θ son los desplazamientos angulares de los rotores, las η los coeficientes de amortiguamiento, las K los coeficientes de rigidez torsional y $T\cos\omega t$ el momento torsional aplicado.

Utilizando la analogía tensión-fuerza obtenemos las ecuaciones eléctricas análogas

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R_1i_1 + \frac{1}{C_1}\int(i_1 - i_2)\,dt = v\cos\omega t$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} + R_2i_2 + \frac{1}{C_1}\int(i_2 - i_1)\,dt + \frac{1}{C_2}\int(i_2 - i_3)\,dt = 0$$
$$L_3\frac{di_3}{dt} + R_3i_3 + \frac{1}{C_2}\int(i_3 - i_2)\,dt = 0$$

y el correspondiente circuito eléctrico análogo es el que se muestra en la figura 7-9(*b*).

Problemas propuestos

10. Utilizando la analogía tensión-fuerza, dibujar el sistema eléctrico análogo al sistema mecánico que se muestra en la figura 7-10 y de él deducir la ecuación diferencial de movimiento.

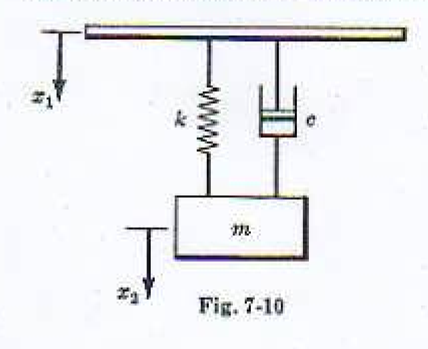
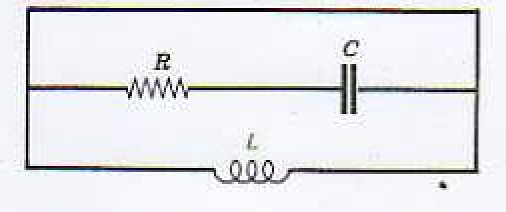


Fig. 7-10

Resp.



$$m\ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) = 0$$
$$c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = 0$$

11. Demostrar que los circuitos eléctricos que se muestran en la figura 7-11 son análogos entre sí, así como también lo son al sistema mecánico dado.

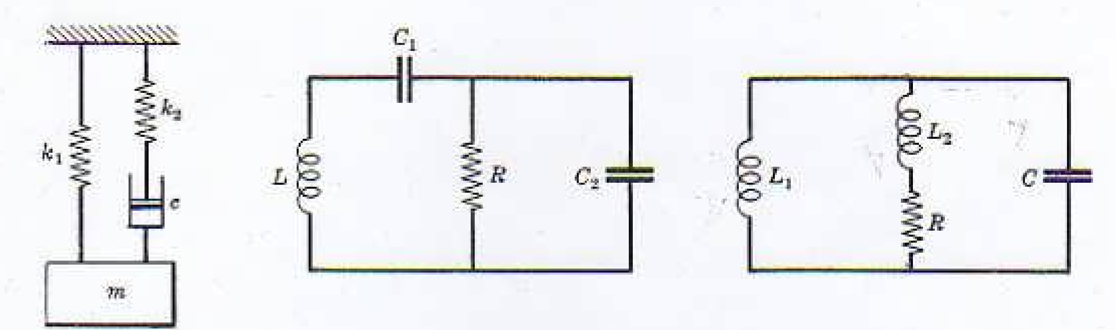


Fig. 7-11

12. Demostrar que los sistemas eléctricos que se muestran en las figuras 7-12(*b*) y 7-12(*c*) son equivalentes al sistema mecánico de la figura 7-12(*a*).

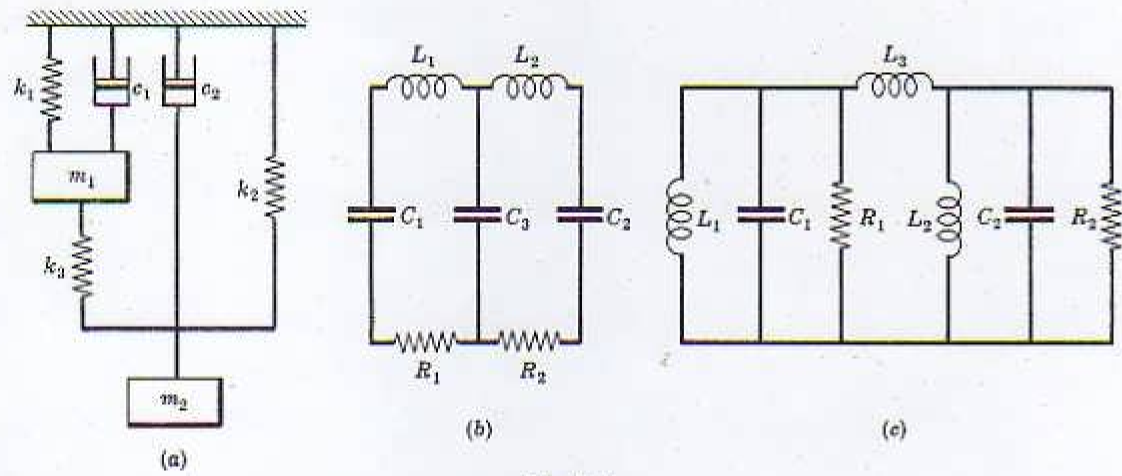


Fig. 7-12

13. Demostrar que los sistemas eléctricos que se muestran en las figuras 7-13(*b*) y 7-13(*c*) son equivalentes al sistema mecánico de la figura 7-13(*a*).

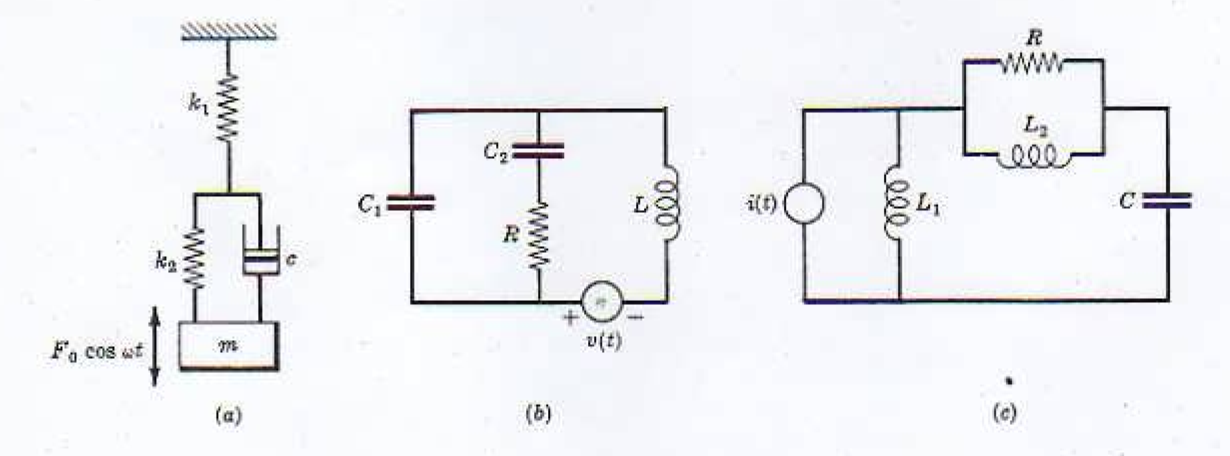


Fig. 7-13

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

14. Demostrar que el sistema eléctrico que se muestra en la figura 7-14(*b*) es equivalente al sistema mecánico de la figura 7-14(*a*).

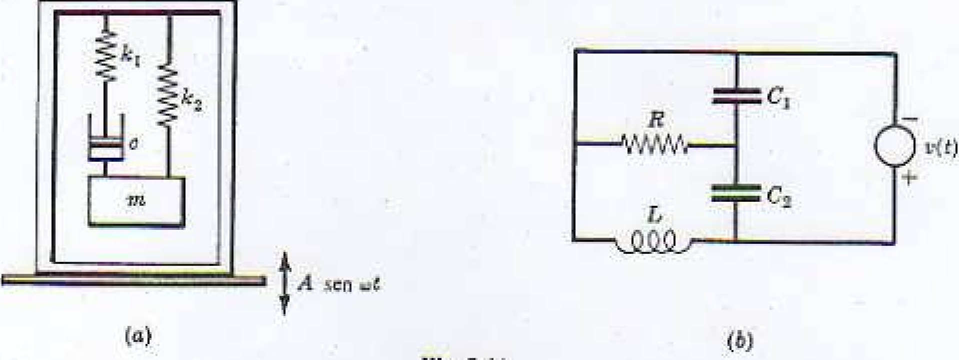


Fig. 7-14

15. Dibujar el sistema eléctrico análogo al sistema torsional bifurcado que se muestra en la figura 7-15(*a*).
Resp. Véase la figura 7-15(*b*).

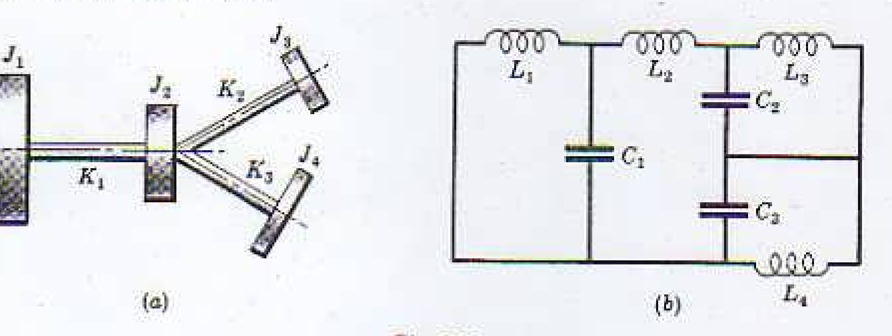
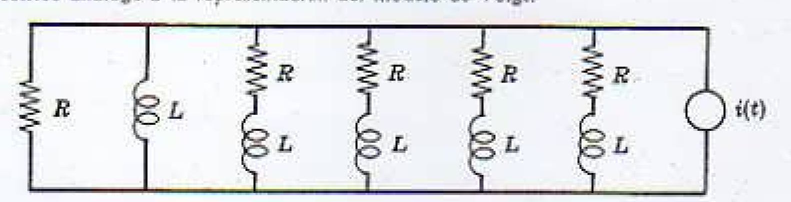


Fig. 7-15

16. En viscoelasticidad se representa el comportamiento de algunos materiales por medio del modelo de Voigt que se muestra en la figura 7-16. Utilizando la analogía corriente-fuerza, dibujar el sistema eléctrico análogo a la representación del modelo de Voigt.
Resp.



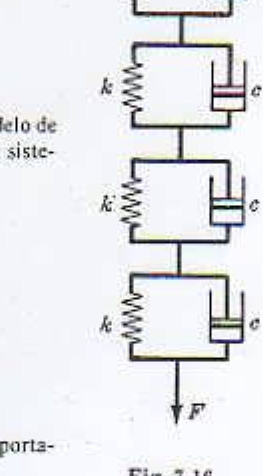
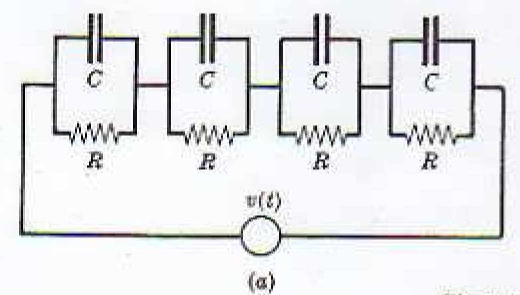


Fig. 7-16

17. La figura 7-17(*a*) muestra el circuito eléctrico del modelo de Maxwell, que representa el comportamiento de un sólido. Dibujar la representación mecánica equivalente.



Resp. Véase la figura 7-17(*b*).



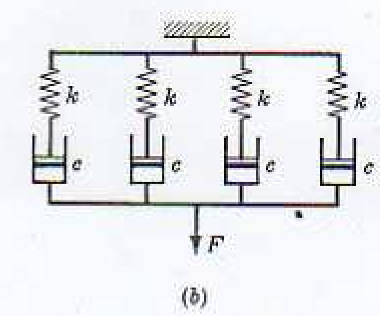


Fig. 7-17

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

18. El circuito eléctrico que se muestra en la figura 7-18 consta de un inductor L, un condensador C y una resistencia R, que están conectados en serie con una fuente de tensión alterna $v(t) = E_0$ sen ωt. Encontrar una expresión para $q(t)$. Comparar las respuestas de los estados transitorio y estacionario del sistema que se muestra en la figura 7-19.

Resp. $q(t) = e^{-(R/2L)t}[A \text{ sen } \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}t + B \cos \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}t] + D \text{ sen }(\omega t - \phi)$

donde $D = \dfrac{E_0/L}{\sqrt{[1/LC - \omega^2]^2 + (R\omega/L)^2}}$, $\quad \phi = \tan^{-1}\dfrac{R\omega/L}{(1/LC - \omega^2)}$

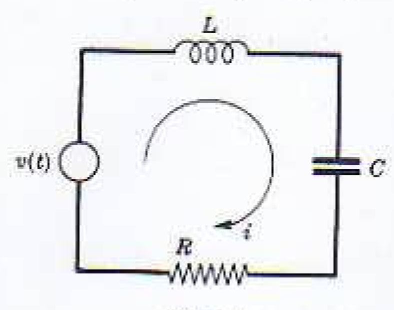


Fig. 7-18

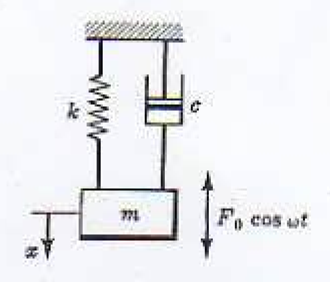


Fig. 7-19

19. Utilizar el análisis dimensional para deducir las siguientes cantidades adimensionales, las cuales relacionan sistemas mecánicos con sus correspondientes sistemas eléctricos análogos:

$$\omega\sqrt{m/k} = \omega_e\sqrt{LC}, \quad c^2/km = R^2C/L, \quad F/kx = vC/q$$

20. Los elementos mecánicos del sistema que se muestra en la figura 7-20 son: $k = 100$ lb/pul, $W = 10$ lb y $c = 0{,}01$ lb-seg/pul. Si se utiliza una inductancia $L = 0{,}01$ henrios y las frecuencias eléctricas son 100 veces las frecuencias mecánicas, ¿cuál será el valor de los demás elementos del circuito eléctrico equivalente?

Resp. $C = 0{,}26(10)^{-5}$ faradios, $R = 0{,}39$ ohmios

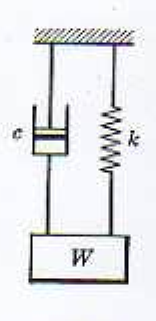


Fig. 7-20

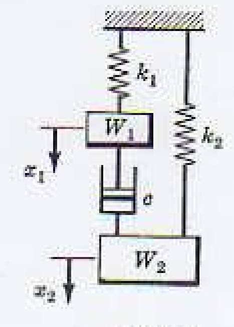


Fig. 7-21

21. Determinar los elementos del circuito eléctrico equivalente al sistema mecánico que se muestra en la figura 7-21, utilizando la analogía tensión-fuerza. Los elementos mecánicos son: $k_1 = 10$ lb/pul; $k_2 = 100$ lb/pul; $c = 0{,}1$ lb-seg/pul; $W_1 = 10$ lb; $W_2 = 100$ lb; $F_0 = 10$ lb y $\omega = 10$ rad/seg. Algunos de los elementos eléctricos son: $C_1 = 10^{-6}$ faradios, $C_2 = 2(10)^{-6}$ faradios y $\omega_e = 100\omega$. $F_0 \cos \omega t$ actúa tanto sobre W_1 como sobre W_2.

Resp. $L_1 = 0{,}26$, $L_2 = 0{,}13$ henrios
$R = 100$ ohmios
$x_1 = v_{C_1}/v$, $x_2 = (v_{C_2}/v)(0{,}1)$

Josué Arturo Cedeño González
Ingeniería Mecánica Industrial
Universidad Tecnológica de Panamá

www.elsolucionario.net